ESTIMASI INTERVAL KEPERCAYAAN (*CONFIDENCE INTERVAL*) PARAMETER MODEL PROSES GEOMETRIK WEIBULL PADA ANALISIS UJI HIDUP UNTUK DATA TERSENSOR TIPE II

Asep Solih A[1*] Rini Cahyandari[2] Tarkinih [3]
[123]Program Studi Matematika UIN Sunan Gunung Djati Bandung

ABSTRAK

Tulisan ini bertujuan untuk menentukan prosedur estimasi interval kepercayaan (*confidence interval*) parameter model proses geometrik pada analisis uji hidup (*life testing*) untuk data tersensor tipe II yang berdistribusi Weibull. Metoda kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) digunakan dalam penaksiran parameter, penyelesaian taksiran interval kepercayaan diselesaikan dengan metoda numerik *Newton Raphson* dan *bootstrap percentile CI* dengan selang kepercayaan 95%.

Kata Kunci : Proses Geometrik, Uji Hidup (life testing), Data Tersensor Tipe II, Distribusi Weibull, *Bootstrap.*

I. Pendahuluan

Uji hidup (*life testing*) adalah pengujian daya tahan hidup atau keandalan (*reliability*) suatu obyek penelitian baik berupa produk, individu, sistem, unit ataupun komponen pada kondisi operasional tertentu [1]. Uji hidup pada suatu obyek penelitian menghasilkan data waktu hidup (*life time data*). Data waktu hidup yang diperoleh dari percobaan dapat berbentuk data lengkap dan data tersensor. Data lengkap (*complete data*) diperoleh jika seluruh unit/komponen dalam percobaan diuji sampai terjadi kerusakan (*failure*). Data tersensor (*censored data*) diperoleh jika tidak seluruh unit/komponen mengalami kerusakan sampai dengan kondisi pengamatan yang ditentukan, dengan kata lain masih terdapat unit/komponen yang “hidup” saat terjadi penyensoran. Salah satu jenis data tersensor adalah data tersensor tipe II, dimana data diperoleh dari uji hidup yang dihentikan (disensor) jika telah terjadi r kerusakan dari observasi sebanyak n unit/komponen dengan $1 \leq r \leq n$, artinya masih terdapat (*n*-*r*) data yang masih hidup sebagai data tersensor.

Penelitian yang berkaitan dengan uji hidup banyak dilakukan dalam berbagai bidang diantaranya dalam industri manufaktur, kesehatan, asuransi, dll. Sebelum memasarkan suatu produk, perusahaan harus mengetahui keandalannya atau seberapa lama rata-rata masa hidup produk sehingga masih dalam performa yang diharapkan. Hal ini perlu untuk diketahui sebagai jaminan kualitas produk tersebut bagi produsen maupun konsumen. Untuk mengetahui lamanya produk bertahan dapat diuji dengan melihat data waktu kerusakan produk yang diperoleh baik pada kondisi operasi normal maupun dengan uji hidup yang dipercepat (*accelerated life testing*), Uji hidup yang dipercepat biasanya dilakukan untuk prodak yang memiliki masa hidup yang panjang.

Uji hidup juga dapat dilakukan dengan mengamati satu unit/sistem sampai terjadi kerusakan, saat terjadi kerusakan unit atau sistem bisa dilakukan dengan cara penggantian (*replace*) atau perbaikan (*repair*) agar dapat berfungsi kembali . Dalam kondisi penggantian atau perbaikan sempurna (perfect repair) unit/ sistem akan menghasilkan kondisi seperti semula (*as good as new*) atau rata-rata laju kerusakan (*failure-rate*) akan kembali pada kondisi seperti baru. Proses seperti ini dikenal dengan proses pembaharuan (*renewal process*). Dalam kondisi perbaikan yang tidak sempurna (*imperfect repair*) akan menghasilkan rata-rata laju kerusakan yang semakin pendek antar waktu kerusakan unit/komponen, salah satu pendekatan model dalam kondisi seperti ini adalah model proses geometrik.

Konsep proses geometrik pertama kali diperkenalkan oleh Lam pada tahun 1988 [5]. Lam, mempelajari model proses geometrik untuk sistem atau komponen multi jarak dan menentukan kebijakan penggantian yang optimal serta meminimalkan biaya rata-rata jangka panjang per satuan waktu. Zhang [7], menggunakan proses geometrik untuk memodelkan sistem atau komponen dengan perbaikan sederhana. Kamal, dkk [4] meneliti estimasi *CI* proses geometrik Weibull untuk uji dipercepat data lengkap.

 ISSN 1979-8911

Tulisan ini menjelaskan model proses geometrik untuk analisis uji hidup menggunakan berdistribusi Weibull pada data tersensor tipe II dengan mencari interval kepercayaan menggunakan *bootstrap* parametrik. Bagian II dari tulisan ini menjelaskan model proses geometrik berdistribusi Weibull, selanjutnya estimasi parameter model dengan menggunkan MLE dan Newton Raphson diuraikan dalam bagian III. Bagian IV menjelaskan prosedur estimasi interval kepercayaan model, terakhir simulasi penerapan prosedur estimasi diuraikan di bagian V.

II. Model Proses Gerometrik Weibull

A. Proses Geometrik

Proses Geometrik pertama kali diperkenalkan oleh Lam pada tahun 1988. Barisan variabel acak non-negatif $\{T_n,\ n = 1,\ 2, \dots\}$ dikatakan proses geometrik jika independen dan fungsi distribusi T_n diberikan oleh $F(\lambda^{n-1}\,t)$ untuk $n = 1,\ 2, \dots$, dimana $\lambda > 0$ yang disebut rasio proses geometrik. Jika $\{T_n,\ n = 1,\ 2, \dots\}$ adalah proses geometrik dan fungsi kepadatan untuk T_1 adalah f , sehingga untuk fungsi kepadatan peluang untuk T_n adalah: $\lambda^{n-1}\,f(\lambda^{n-1}\,t)$

Misalkan fungsi distribusi dan fungsi kepadatan T_1 masing-masing F dan f, dinotasikan $E(T_1) = \mu$ dan $Var\,(T_1) = \sigma^2$, maka distribusi kepadatan peluang dari T_n akan diberikan $\lambda^{n-1}\,f(\lambda^{n-1}\,t)$ dengan $E(T_n) = \frac{\lambda}{\alpha^{n-1}}$ dan $Var\,(T_n) = \frac{\sigma^2}{\lambda^{2(n-1)}}$. [4] [5]

B. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull didefinisikan peubah acak kontinu T berdistribusi Weibull, dengan parameter α dan β , jika fungsi padatnya diberikan oleh:

$$f(t|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} t^{\beta-1} exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, & x \geq 0 \\ 0 \qquad , & x < 0 \end{cases}$$

Dimana $\beta > 0$ dan $\alpha > 0$ adalah parameter dari distribusi Weibull. Fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Weibull adalah

$$f(t|\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 - exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, & x \geq 0 \\ 0 \qquad , & x < 0 \end{cases}$$

Fungsi *survival* dari distribusi Weibull adalah

$$S(t) = exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}, \qquad x \geq 0$$

ISSN 1979-8911

C. Metoda Bootstrap dan *Confidence Interval*

Bootstrap pertamakali diperkenalkan oleh Efron pada tahun 1979Terdapat dua pendekatan metoda bootsrap yaitu bootstrap parametrik dan non parametrik.

Secara umum penentuan estimasi parameter bootsrap dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut :

1. Misalkan $X = (X_1, X_2, \dots . X_n)$ adalah sampel yang i.i.d. dari distribusi F , dimana $F(x) = P(X \le x)$
2. Kita dapat peroleh beberapa parameter $\theta(F)$ dari distribusi ini (misalkan mean, median, variance, dll), dan misalkan estimator $\ddot{\theta}(\bar{F_n})$ atau $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\{X_1, X_2, \dots . X_n\})$, dimana $\bar{F_n}$ adalah distribusi empirik dengan $\widehat{F_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(X_j) \le x$
3. *Generate* sampel bootstrap (resampling), dapat dilakukan dengan dua pendekatan :

   a. Metoda bootstrap non parametrik : $X_{ij}^{*} \sim^{iid} \widehat{F_n}$; $i = 1,2, \dots , B$, $j = 1,2, \dots , n$

   b. Metoda bootstrap parametrik : $X_{ij}^{\#} \sim^{iid} G_{\hat{\lambda}}$; $i = 1,2, \dots , B$, $j = 1,2, \dots , n$ dengan $G_{\hat{\lambda}} = G(.|X)$ sebuah elemen dari $\{G_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ dari distribusi. Parameter λ diestimasi dengan metoda maximum likelihood
4. Hitung replikasi bootstrap $\hat{\theta}(X_i^{*}) = \hat{\theta}(\{X_{i1}^{*}, X_{i2}^{*}, \dots , X_{in}^{*}\})$; $i = 1,2, \dots, B$ untuk bootstrap non parametrik

   $\hat{\theta}(X_i^{\#}) = \hat{\theta}(\{X_{i1}^{\#}, X_{i2}^{\#}, \dots , X_{in}^{\#}\})$; $i = 1,2, \dots, B$ untuk bootstrap parametrik
5. Tentukan estimasi parameter bootstrap (misalkan untuk mean, varians, dan median)

a. mean bootstrap :

$\hat{\theta}^{\times} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\theta}(X_i^{\times})$

b.varians bootstrap :

$\widehat{Var}^{\times} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}[\hat{\theta}(X_i^{\times}) - \hat{\theta}^{\times}]^2$

c. median bootstrap :

$\ddot{\theta}^{\times}_{(B+1)/2} = \ddot{\theta}(X^{\times}_{(i)})$;

$X^{\times}_{(i)}$ = sampel terurut

Tulisan ini akan mengkaji lebih khusus kepada penaksiran *confidence interval (CI)* dengan pendekatan bootstrap parametrik.

Tiga metoda CI yang digunakan yaitu : *percentile CI, standard normal CI, dan bias-corrected percentile CI*. Teori yang lebih detail untuk tiga metoda ini telah dikaji lebih dalam dalam beberapa tulisan [8], [6], dan [3]. Edwards [7] secara detail telah menguraikan algoritma dari metoda ini.

Bootstrap percentile CI diperoleh berdasarkan pada kuantil distribusi bootstrap yang diperoleh dengan rumusan berikut :

$$\left[\hat{\theta}^{*}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \hat{\theta}^{*}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \quad (1)$$

dimana $\hat{\theta}^{*}_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ dan $\hat{\theta}^{*}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ adalah kuantil dari estimasi distribusi bootstrap

Bootstrap standard CI diperoleh dengan rumusan berikut :

$$\left[\hat{\theta} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\widehat{se}_{\hat{\theta}}\ , \hat{\theta} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\widehat{se}_{\hat{\theta}}\right] \quad (2)$$

Dimana $\widehat{se}_{\hat{\theta}}$ adalah standar error yang diperoleh dari varians estimasi bootstrap θ, dan $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ adalah kuantil ke - $\frac{\alpha}{2}$ dari distribusi normal standar.

Terakhir, bias-corrected percentile CI didefinisikan sebagai jumlah perbedaan antara median estimasi bootstrap $\hat{\theta}^{*b}$ dan estimasi $\hat{\theta}$ dari data asli. Estimasi konstanta bias-correction dinotasikan dengan $\hat{z}_0$, yang didefinisikan

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#(\ddot{\theta}^{*b} < \ddot{\theta})}{B}\right)$$

dimana Φ^{-1} merupan invers distribusi normal standar kumulatif dan #

ISSN 1979-8911

adalah "banyaknya". Sehingga percentil ke-$100(1-\alpha)$ bias-corrected persentil CI dapat diperoleh sebagai berikut :

$$[\hat{\theta}^{*\alpha_1}, \hat{\theta}^{*\alpha_2}] \qquad (3)$$

dimana $\alpha_1 = \Phi\left(2\hat{z}_0 + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ dan $\alpha_1 = \Phi\left(2\hat{z}_0 + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ dengan Φ adalah distribusi normal standar kumulatif.

D. Data Tersensor Tipe II

Data tersensor tipe II adalah suatu data waktu kematian atau waktu tahan hidup yang hanya terdapat r buah observasi dalam sampel acak yang berukuran n dengan $1 \le r \le n$. Dalam uji hidup ini, total observasi sebanyak n dan penelitian akan dihentikan setelah kematian atau kegagalan tertentu telah terjadi .

Dalam data tersensor tipe II terdapat r pengamatan dari n sampel yang diamati, dan eksperimen akan dihentikan setelah kegagalan ke $-r$ yang terjadi sebelum waktu t_i. Data terdiri dari r tahan hidup terkecil $T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le \cdots \le T_{(r)}$ dari sampel ndom yang terdiri dari n unit.

Misalkan T merupakan variabel acak/random dari n individu yang diamati, $f(t_1)$ merupakan fungsi densitas peluang dari variabel acak pertama, dan seterusnya hingga $f(t_r)$ untuk variabel acak individu ke$-r$.

Individu yang gagal yaitu individu ke-1 sampai individu ke-r masing-masing sebanyak satu komponen. Sedangkan individu yang masih bertahan melebihi kegagalan dari individu ke$-r$ dituliskan dengan $T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}, \dots, T_n$ sebanyak $n-r$. Sampel acak berukuran n dengan kegagalan r ini mengikuti distribusi multinomial, sehingga terdapat $\frac{n!}{1!1!\dots1!(n-r)!}$ urutan yang mungkin terjadi dari n pengamatan.

Tahan hidup dari r objek pertama yang gagal dicatat sebagai statistika berurut $T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le \cdots \le T_r$, untuk pembahasan selanjutnya ditulis dengan $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$. Dalam hal ini masi ada $(n-r)$ objek yang masi tetap hidup pada saat uji dihentikan. Fungsi densitas peluang bersama dari $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ dari data yang diamati dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right][S(t_r)]^{n-r}$$

E. Likelihood Model Proses Geometrik Weibull Pada Data Tersensor Tipe II

Model dibangun dengan asumsi proses geometrik dan berdistribusi Weibull, sehingga fungsi kepadatan peluang adalah sebagai berikut :

$$f_G(t|\alpha,\beta,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta} \beta t^{\beta-1} exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}t\right)^{\beta}\right\}$$

Selanjutnya mendapatkan fungsi *likelihood* pada data tersensor tipe II, dengan t_r (waktu ke $-r$) data tersensor tipe II dengan fungsi ketahanan hidup $S(t_r)$ dengan model proses geometri adalah sebagai berikut :

$$S_G(t_r) = \exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}\right\}$$

Sehingga diperoleh bentuk likelihood model proses geometrik Weibull untuk analisis uji hidup pada data tersensor tipe II adalah sebagai berikut:

$$l(\alpha,\beta,\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta} \beta t_i^{\beta-1} exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\}\right]\left[\exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}\right\}\right]^{n-r}$$

Pada persamaan tersebut diketahui bahwa, n adalah jumlah obyek penelitian dan r adalah obyek penelitian rusak, gagal, atau mati, yang merupakan sampel acak dari n, dimana $r < n$ dan r merupakan waktu *survival* terurut $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ pada suatu penelitian.

III. Estimasi Kemungkinan Maksimum Parameter Model

Metode estimasi yang digunakan adalah menggunakan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*), dimana fungsi log-likelihood untuk model proses geometrik Weibull pada data tersensor tipe II dengan parameter $\alpha, \beta, \text{dan } \lambda$ adalah

$$\ln l(\alpha,\beta,\lambda) = \ln\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right) + \beta r \ln\lambda - \beta r \ln\alpha + r\ln\beta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{r}\ln t_i - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta} - (n-r)\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial \ln l(\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{r}\left\{-\frac{\beta r}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\} + (n-r)\,\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial \ln l(\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{\beta r}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\} - (n-r)\frac{\beta}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln l(\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{\beta r}{\alpha^2} - \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\} - (n-r)\,\frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln l(\alpha,\beta,\lambda)}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{r}\left\{-\frac{\beta r}{\lambda^2} - \frac{\beta(\beta-1)}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\} - (n-r)\,\frac{\beta(\beta-1)}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda} l(\alpha,\lambda,\beta) = \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda\partial\alpha} l(\alpha,\lambda,\beta) = \sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{\beta^2 r^2}{\alpha\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_i\right)^{\beta}\right\} + \frac{\beta^2}{\alpha\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha}t_r\right)^{\beta}$$

Turunan parsial pertama dan kedua fungsi diperlukan untuk menentukan estimasi parameter dari α dan λ berbentuk implisit dengan pendekatan numerik menggunakanan metode *Newton-Raphson*.

Algoritma estimasi parameter dengan sebagai berikut :

1. Tentukan nilai awal taksiran parameter dalam model, $\binom{\alpha}{\lambda}^{0}$
2. Tentukan vektor skor statistik $\left(F\binom{\alpha}{\lambda}\right)$ dan matriks informasi $\left(f\binom{\alpha}{\lambda}\right)$. Dalam hal ini, vektor statistik merupakan turunan pertama dari fungsi log-likelihood terhadap parameter-parameternya dan matriks informasi merupakan turunan kedua dari fungsi log-likelihood terhadap paramaternya-parameternya.
3. Untuk iterasi $(r+1), r \geq 0$ hitung:

$$\binom{\alpha}{\lambda}^{(r+1)} = \binom{\alpha}{\lambda}^{(r)} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2} l(\alpha,\lambda,\beta) & \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\lambda} l(\alpha,\lambda,\beta) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda\partial\alpha} l(\alpha,\lambda,\beta) & \frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2} l(\alpha,\lambda,\beta) \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial\alpha} l(\alpha,\lambda,\beta) \\ \frac{\partial l}{\partial\lambda} l(\alpha,\lambda,\beta) \end{pmatrix}\right]$$

4. Ulangi langkah (3) sampai nilai konvergen, dimana $\left|\lambda^{(r+1)} - \lambda^{(r)}\right| < \varepsilon$

IV. Prosedur Estimasi Interval Kepercayaan Parameter Model dengan Bootsrap

Prosedur estimasi interval kepercayaan (*confidence interval*) parameter model proses geometrik Weibull untuk analisis uji hidup pada data tersensor tipe II, dilakukan dengan tahapan perhitungan sebagai berikut:

1. Terdapat sampel t_i dari suatu proses dengan ukuran sampel (n) dengan data waktu hidup (r) dengan asumsi data berdistribusi Weibull.
2. Tentukan nilai parameter awal, dimana parameter awalnya adalah α dan λ, denga asumsi parameter bentuk β tetap.
3. Tentukan ε, nilai toleransi konvergensi
4. Tentukan estimasi parameternya $(\hat{\alpha}_1,\ \hat{\lambda}_1)$ dari sampel t_i yang merupakan data awal dengan menggunakan metode *Newton-Raphson* .
5. Lakukan prosedur *bootstrap* parametrik dengan membangkitkan n sampel dengan pengembalian $X^*{}_i\ ;\ i = 1,2,\ldots,n$ dimana: $X^*{}_i \sim W\left(t;\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\lambda}},\beta\right)$
6. Tentukan estimasi parameternya $\hat{\alpha}_q$ dan $\hat{\lambda}_q$ untuk $q = 1,2,\ldots,Q$ dengan metoda Newton Raphson
7. Ulangi langkah 5 sebanyak $Q = 100$, diperoleh hasil dari estimasi: $(\hat{\alpha}_1,\ \hat{\lambda}_1), (\hat{\alpha}_2,\ \hat{\lambda}_2), (\hat{\alpha}_3,\ \hat{\lambda}_3), (\ldots), (\hat{\alpha}_q,\ \hat{\lambda}_q)$
8. Urutkan nilai estimasi parameter untuk $\hat{\alpha}$
9. Tentukan rata-rata untuk $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\lambda}$, yaitu:
$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_{j=1}^{q}\hat{\alpha}_j}{q} \quad , \quad \bar{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{q}\hat{\lambda}_j}{q}$$
10. Tentukan rata-rata nilai *standard error* $(\overline{SE})$ untuk $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\lambda}$, yaitu:
$$\hat{\alpha}:\ \overline{SE} = \sqrt{\frac{s^2}{q}} \text{ dengan variansi } (s^2) = \frac{\sum_{j=1}^{q}(\hat{\alpha}_j - \bar{\alpha})^2}{q-1}$$
$$\hat{\lambda}:\ \overline{SE} = \sqrt{\frac{s^2}{q}} \text{ dengan variansi } (s^2) = \frac{\sum_{j=1}^{q}(\hat{\lambda}_j - \bar{\lambda})^2}{q-1}$$
11. Tentukan *bootstrap percentil CI*
$$\left[\hat{\theta}^*_{\alpha}, \hat{\theta}^*_{(1-\alpha)}\right]$$
Dimana $\hat{\theta}^*_{\alpha}$ dan $\hat{\theta}^*_{(1-\alpha)}$ adalah persentil dari sebaran $\hat{\theta} = (\hat{\alpha},\hat{\lambda})$ dengan selang kepercayaan 95% $(\alpha = 0.05)$.

ISSN 1979-8911

V. Simulasi

Simulasi perhitungan dilakukan dengan asumsi data berdistribusi Weibull, sebuah sampel acak $X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \dots, n$, dimana $X_i \sim W\left(x;\ \frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\lambda}}, \beta\right)$ jumlah total penelitian (n) dan data waktu hidup yang didapat (r) adalah $(n,\ r) = (20, 10)$ dengan $r \leq n$. Dua nilai parameter awal yang berbeda α=0.5 dan 0.25, λ=1.02 dan 1.04, dengan parameter β=1.5 konstan.

Selanjutnya dilakukan perhitungan estimasi dan masing-masing statistik data yaitu, rata-rata estimasi $(mean)$, rata-rata *standar error* (SE) , serta estimasi interval kepercayaan (*confience interval*) untuk data waktu kerusakan dengan metode *bootstrap persentil CI* , sesuai prosedur yang telah dibahas dalam bagian IV. Dengan menentukan dua nilai awal α dan λ yang berbeda dengan banyaknya resampling Q=100 diperoleh hasil taksiran seperti terlihat dalam Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Pada tabel 4.1 dan 4.2. baik pada kasus 1 maupun kasus 2, menunjukkan hasil yang baik dan konsisten untuk estimasi parameter interval kepercayaan, perbedaan hasil baik batas atas maupun batas bawah kurang dari 4% dengan nilai awal parameter α yang sama dengan λ berbeda.

VI. Simpulan

Model yang dibangun dengan asumsi proses geometrik Weibull pada data tersensor tipe II diperoleh fungsi likelihood

$$l(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{n!}{(n-r)!}\left[\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\beta} \beta t_i^{\beta-1} exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha} t_i\right)^{\beta}\right\}\right]\left[\exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\alpha} t_r\right)^{\beta}\right\}\right]^{n-r}$$

Taksiran parameter dengan metoda kemungkinan maksimum secara numerik menggunakan metode Newton Raphson. Prosedur estimasi parameter interval kepercayaan persentil dengan metoda bootstrap parametrik diperoleh. Hasil studi simulasi menunjukkan bahwa dengan perbedaan nilai awal untuk λ sebagai parameter geometrik memberikan hasil yang baik dan konsisten untuk parameter skala α berbeda dengan asumsi parameter β bentuk Weibull konstan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Elsayed, E.A. *Reliability Engineering*. Addison Wesley Longman Inc Reading Massachusetts. 1999

[2] Huang, Shan. *Statistical Inference in Accelerated Life Testing with Geometric Process Model*. Thesis. Faculty San Diego State University, 2011.

[3] J. Chen, *Bayesian Computing For Geometric Process in Maintenance Problems, Mathematics and Computers In Simulation*, vol.81, pp.771-781, 2010.

[4] Kamal Mustafa, Shazia Zarrin, S. Saxena, dan Arif-Ul-Islam. *Weibull Geometric Process Model for the Analysis of Accelerated Life Testing with Complete Data*. International Journal of Statistics and Application, **2(5)** : 60-66, 2012.

[5] Lam, Yeh., *The Geometric Process And Its Application*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2007.

[6] Lawless, J.F. *Statistical Models and Method for Lifetime Data*. University of Waterloo, 1982.

[7] Zhang, Y. L. *A Geometrical Process Repair Model for a Repairable System with Delayed Repair*. Computers and Mathematics with Applications, vol. 55, pp. 1629-1643, 2008.

*email : aasolih@uinsgd.ac.id

Tabel 4.1 Estimasi Interval Kepercayaan (*Confidence Interval*) Parameter Model Proses Geometrik Weibull Untuk Analisis Uji Hidup Pada Data Tersensor Tipe II dengan parameter awal $\lambda = 1.02$.

α	Estimator	Mean	$\widehat{SE}$	Bootstrap Percentil IC	
				Lower 5%	Upper 95%
0.5	$\hat{\alpha}$	0.7089	0.0065	0.5437978	**0.7673579**
	$\hat{\lambda}$	0.7753	0.0070	0.9571579	**0.7157558**
0.25	$\hat{\alpha}$	0.4001	0.0074	0.2682962	**0.5116446**
	$\hat{\lambda}$	0.8182	0.0070	0.9791873	**0.7344917**

Tabel 4.2 Estimasi Interval Kepercayaan (*Confidence Interval*) Parameter Model Proses Geometrik Weibull Untuk Analisis Uji Hidup Pada Data Tersensor Tipe II dengan parameter awal $\lambda = 1.04$

α	Estimator	Mean	$\widehat{SE}$	Bootstrap Percentil IC	
				Lower 5%	Upper 95%
0.5	$\hat{\alpha}$	0.7239	0.0078	0.5402168	**0.7925664**
	$\hat{\lambda}$	0.7758	0.0087	0.9827746	**0.7079455**
0.25	$\hat{\alpha}$	0.4031	0.0078	0.2728632	**0.5006058**
	$\hat{\lambda}$	0.8320	0.0077	0.9826785	**0.7597152**