MODEL ANTRIAN MULTI SERVER ($M^{[x]}/M/C;C-1/FCFS$) DENGAN GANGGUAN PELAYANAN DENGAN POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK

Elis Ratna Wulan dan Neng Sri Wahyuni

elisrwulan@yahoo.com

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Gunung Djati Bandung

ABSTRAK

Dalam proses antrian sering sekali terjadi gangguan pelayanan, misalnya gangguan karena kerusakan salah satu server, penjadwalan atau karena salah satu server yang meninggalkan sistem sementara. Pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) adalah kedatangan sekelompok orang pada suatu waktu secara bersamaan. Model antrian multi server dengan kedatangan berkelompok pada persoalan gangguan pelayanan dinotasikan dengan ($M^{[x]}/M/C;C-1/FCFS$). Penyelesaian masalah antrian dapat dilakukan dengan metode analitik atau teori antrian yang telah memiliki formula yang telah ditetapkan. Permasalahan pada penelitian ini adalah bagaimana mengatasi persoalan gangguan pelayanan jika salah satu servernya mengalami kerusakan dengan menghitung karakteristiknya yaitu peluang kesibukan server atau traffic intensity, rata-rata banyak pelanggan dalam antrian dan sistem, dan menentukan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian dan sistem. Pengujian distribusinya yaitu menggunakan Chi-kuadrat. Pada paper ini penelitiannya mengambil studi kasus pada antrian waroeng steak jatinangor. Dilihat dari hasil analisis, sistem antrian pada waroeng steak jatinangor pada persoalan gangguan pelayanan dengan rata-rata ukuran kelompoknya $k=3$ adalah $(M^3/M/15):(FCFS/\sim/\sim)$, $\rho=0.072$, $L_q=-0.484$, $L_s=0.596$, $W_q=0$, $W_s=0.02$.

Kata Kunci: Model Antrian Multi-Server, Kedatangan Berkelompok (*batch Arrival*), Gangguan Pelayanan, Chi-Kuadrat, Probability Generating Function (PGF).

1. PENDAHULUAN

Salah satu ilmu yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah antrian adalah matematika. Suatu antrian adalah suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan pelayanan dari satu atau lebih pelayanan (fasilitas pelayanan). Studi matematika dari kejadian atau gejala garis tunggu disebut teori antrian. Kejadian garis tunggu disebabkan oleh kebutuhan pelayanan yang melebihi kapasitas pelayanan atau fasilitas pelayanan, sehingga pelanggan yang datang tidak bisa langsung mendapatkan pelayanan. Contohnya antrian terjadi pada loket bioskop, loket kereta api, loket-loket pada bank, dermaga di pelabuhan, loket jalan tol, pelabuhan udara, telepon jarak jauh, tempat praktek dokter, loket stadion, pompa minyak dan banyak lagi yang lainnya **[9]**.

Dalam proses antrian sering sekali terjadi gangguan pelayanan, misalnya gangguan karena kerusakan salah satu server, penjadwalan atau karena salah satu server yang meninggalkan sistem sementara **[1]**.

Gangguan pelayanan karena kerusakan berkala dalam sistem adalah kejadian umum yang membawa dampak pada efisiensi sistem, panjang antrian dan waktu tunggu pelanggan dalam sistem. Hal ini yang menjadi kendala dalam sistem antrian dan akan mengakibatkan antrian yang panjang sehingga waktu tunggu pelanggan akan bertambah lama. Salah satu komponen dari antrian adalah pola kedatangan pelanggan, pola kedatangan pelanggan dapat berupa *one at a time* yaitu seorang pelanggan datang pada satu waktu dan *batch arrival* yaitu sekelompok pelanggan yang datang bersamaan pada satu waktu **[10]**.

Pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) adalah kedatangan sekelompok orang pada suatu waktu secara bersamaan, misalnya kedatangan dua pelanggan dalam suatu kelompok secara bersamaan, tiga pelanggan atau empat pelanggan yang datang dan seterusnya, kemudian mengantri untuk mendapatkan pelayanan. Pada tipe kedatangan berkelompok, jumlah kedatangan unit dalam satu kali kedatangan merupakan variabel acak positif X, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(X = k) = a_k$$

Dimana $a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$, λ_k adalah laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k unit **[4]**.

Banyak penulis telah meneliti aspek analitis model antrian kedatangan berkelompok melalui teknik yang berbeda. Beberapa penulis menyajikan solusi analitis untuk sistem antrian multi server dengan gangguan pelayanan, seperti Shoukry, E.M., Gharraph, M.K., dan Hassan, N.A. yang menganalisis sistem $(M/E_k/S;S-1/N/FCFS)$ dengan operator server heterogeneus dalam dua model. Dalam tulisannya, mereka mempelajari sistem $(M/E_k/S;S-1/N/FCFS)$ dengan N kapasitas terbatas dan dua mode operasi untuk servernya dengan kedatangan yang berbeda dan untuk disiplin pelayanannya yaitu FCFS **[2]**.

Dalam paper ini akan dibahas model antrian multi server $(M^{[x]}/M/C;C-1/FCFS)$ dengan gangguan pelayanan. Misalnya ketika salah satu fasilitas pelayanannya rusak, sistem beroperasi dengan fasilitas pelayanan $(C-1)$ yang tersisa. Setelah fasilitas pelayanan yang rusak diperbaiki, fasilitas pelayanan tersebut akan masuk kembali ke dalam sistem sehingga beroperasi dengan fasilitas pelayanan C lagi **[1]**. Adapun masalah yang dibahas mencakup penentuan kesibukan server jika terjadi gangguan pelayanan, rata-rata banyaknya pelanggan dan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian dan sistem.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang akan dilakukan dalam penelitian paper ini terdiri dari:

a. Studi Literatur

Studi Literatur berupa studi kepustakaan di mana peneliti mempelajari dan mengkaji berbagai sumber seperti, buku, jurnal-jurnal, makalah, paper, tesis, ataupun bentuk lain yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam paper ini.

b. Observasi

Observasi dilakukan di tempat yang telah ditentukan dengan cara mengamati bagaimana proses antrian apabila terjadi kerusakan atau gangguan pada suatu loket atau server di tempat tersebut. Observasi proses antrian ini dapat dilakukan pada bank, fasilitas telekomunikasi, masalah perbaikan mesin, penjadwalan pasien di klinik rumah sakit, pertukaran telepon, dan stan taksi.

c. Pengumpulan Data

Data yang dikumpulkan adalah data jumlah kedatangan pelanggan, data pelayanan yang dimulai pada saat pelanggan masuk sampai dengan selesai pelayanan, data waktu kedatangan dan data waktu pelayanan sampai pelanggan selesai dilayani.

d. Analisis Data

Metode ini adalah metode akhir setelah mengumpulan data yang telah didapat dari lapangan kemudian dianalisis distribusi pola kedatangan dan waktu pelayanan dengan menggunakan Uji Kebaikan-Suai (*Goodnes Of Fit Test*).

3. ANALISIS DATA DAN PEMBAHASAN

3.1 Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

Kedatangan berkelompok (*Batch Arrival*) adalah situasi dimana kedatangan pelanggan yang lebih dari satu orang memasuki suatu sistem antrian secara bersama-sama. Sebagai contoh kedatangan pelanggan secara berkelompok dapat terjadi di sebuah restoran, tempat rekreasi, surat-surat yang datang di kantor pos, dan lain-lain **[3]**.

Pada sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*Batch Arrival*), ukuran suatu kelompok yang masuk kedalam suatu sistem antrian merupakan variabel acak positif X, dengan fungsi peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k adalah **[3]**:

$$P(X = k) = a_k \text{ dengan } k \geq 1 \quad (1)$$

Jika laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k pelanggan dinyatakan dengan λ_k, maka:

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda} \quad (2)$$

dengan λ adalah $\sum_k \lambda_k$.

Banyaknya kedatangan tiap satuan waktu adalah λ dan setiap kedatangan tersebut berukuran $\bar{a}$, maka banyaknya kedatangan tiap satuan waktu pada sistem antrian adalah $\lambda_{\bar{a}}$.

Jika X variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok dengan fungsi peluang $a_k = P(X = k)$ dengan $k \geq 1$ maka *Probability Generating Function* (PGF) dari X adalah:

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, |z| \leq 1 \quad (3)$$

Turunan pertama dari $A(z)$ adalah:

$$A'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

Maka

$$A'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \quad (4)$$

Persamaan (4) merupakan nilai harapan dari X dinyatakan dengan:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = A'(1) \quad (5)$$

Dengan demikian nilai harapan ukuran kelompok yang masuk kedalam sistem antrian dapat diperoleh dengan mencari $A'(z)$ **[3]**.

Jadi nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah:

$$E(X) = A'(1) = \bar{a} \quad (6)$$

3.2 Model Antrian Multi Server pada Persoalan Gangguan Pelayanan dengan Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

Model antrian multi server dengan pola kedatangan berkelompok (*Batch Arrival*) dinotasikan dengan $(M^{[x]}/M/C : FCFS/\sim/\sim)$, sedangkan untuk model antrian dengan gangguan pelayanan pada kedatangan berkelompok dinotasikan dengan $\left(M^{[x]}/M/C:C-1/FCFS\right)$. Karakteristik dari model ini adalah pelayanannya bersifat ganda, kedatangannya berkelompok, antriannya tak berhingga dan $(C-1)$ merupakan gangguan pelayanan yang terjadi pada salah satu servernya.

Gangguan pelayanan dapat terjadi pada barang, manusia, mesin, dan lain-lain. Contohnya pada sistem manufaktur, sistem komputer, gangguan karena kerusakan salah satu server, penjadwalan atau karena salah satu server yang meninggalkan sistem sementara (istirahat). Formula untuk model antrian multi server dengan kedatangan berkelompok (*Batch Arrival*) dapat ditentukan setelah PGF dari N diketahui. Formula-formula untuk model antrian berkelompok ini diantaranya adalah jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian (L_q), jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem (L_s), rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian (W_q), dan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W_s). Formula-formula ini dapat digunakan untuk menganalisis suatu model antrian pada saat terjadi gangguan pelayanan.

Untuk menentukan formula model antrian $\left(M^{[x]}/M/C:FCFS/\sim/\sim\right)$ tidak dapat diselesaikan menggunakan metode rekursif seperti pada model antrian $(M/M/C:FCFS/\sim/\sim)$, maka untuk menentukan formulanya langkah pertama adalah menentukan PGF dari banyak pelanggan dalam sistem. PGF dari N untuk pola kedatangan berkelompok adalah sebagai berikut **[5]**:

$$P(z) = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n z^n}{1-\frac{\lambda z\{1-A(z)\}}{c\mu(1-z)}}$$

$$P(z) = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n z^n}{1-z\frac{\lambda}{c\mu}\{\bar{A}(z)\}}$$

di mana:

$$\bar{A}(z) = \frac{\{1-A(z)\}}{(1-z)}$$

Dari persamaan (7) substitusi $z = 1$, maka

$$P(1) = \frac{c\mu(1-1)\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n 1^n \cdot \left(\frac{1}{c}\right)}{c\mu(1-1) - \lambda z\{1 - A(1)\}}$$

Persamaan (7) menghasilkan $\frac{0}{0}$, sehingga tidak dapat menghasilkan penyelesaian. Maka untuk mendapatkan penyelesaiannya digunakan aturan L'Hospital sebagai

$$\lim_{z\to1} P(z) = \lim_{z\to1} \frac{c\mu(1-z)\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n z^n \cdot \frac{1}{c}}{c\mu(1-z) - \lambda z\{1 - A(z)\}}$$

$$= \lim_{z\to1} \frac{-c\mu\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n z^n \cdot \frac{1}{c}}{-c\mu - \lambda + \lambda A(z) + \lambda z A'(z)}$$

$$= \frac{c\mu\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n \cdot \frac{1}{c}}{c\mu - \lambda A'(1)}$$

Berdasarkan definisi peluang, jumlah total suatu peluang adalah 1. Sehingga didapatkan:

$$1 = \frac{c\mu\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n \cdot \frac{1}{c}}{c\mu - \lambda A'(1)}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n}{c} = 1 - \frac{\lambda A'(1)}{c\mu}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n}{c} = 1 - \frac{\lambda\bar{a}}{c\mu}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n}{c} = 1 - \rho \qquad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n = c(1-\rho)$$

di mana:

$$\rho = \frac{\lambda_{\bar{a}}}{c\mu} \qquad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{c-1}(c-n)P_n = c(1-\rho)$$

$$\sum_{n=1}^{c}(c-n)P_n + P_0 = c(1-\rho)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{c}(c-n)P_n + P_0}{c} = (1-\rho)$$

$$P_0 = 1 - \rho - \frac{\sum_{n=1}^{c}(c-n)P_n}{c} \qquad (10)$$

1. Jumlah Rata-Rata Pelanggan Dalam Antrian $\left(L_q\right)$

Jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian merupakan jumlah dari perkalian pelanggan dalam antrian dengan probabilitas terdapat n pelanggan dinyatakan dengan:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\, P_n$$

Dengan c menyatakan jumlah server, n menyatakan jumlah pelanggan dan P_n menyatakan probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem antrian. Sehingga formula untuk jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian adalah sebagai berikut **[5]**:

$$L_q = \frac{1}{c(1-\rho)} \sum_{n=1}^{c-1} n(c-n)P_n + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{E(X^2)}{E(X)} - 1 \right\} + \frac{\rho}{(1-\rho)} - c\rho \qquad (11)$$

di mana:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

$$= 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots k a_k + \cdots$$

$$= k$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k$$

$$= 1^2 a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \cdots k^2 a_k + \cdots$$

$$= k^2$$

2. Jumlah Rata-Rata Pelanggan Dalam

$$L_s = L_q + \frac{\lambda \bar{a}}{\mu}$$

$$L_s = \left[\frac{1}{c(1-\rho)} \sum_{n=1}^{c-1} n(c-n)P_n + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{E(X^2)}{E(X)} - 1 \right\} + \frac{\rho}{(1-\rho)} - c\rho \right] + \frac{\lambda \bar{a}}{\mu} \qquad (12)$$

3. Rata-Rata Waktu Tunggu Pelanggan Dalam Antrian (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda \bar{a}}$$

$$W_q = \frac{\left[\frac{1}{c(1-\rho)} \sum_{n=1}^{c-1} n(c-n)P_n + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{E(X^2)}{E(X)} - 1 \right\} + \frac{\rho}{(1-\rho)} - c\rho \right]}{\lambda \bar{a}} \qquad (13))$$

4. Rata-Rata Waktu Tunggu Pelanggan Dalam Sistem (W_s)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{\left[\frac{1}{c(1-\rho)} \sum_{n=1}^{c-1} n(c-n)P_n + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{E(X^2)}{E(X)} - 1 \right\} + \frac{\rho}{(1-\rho)} - c\rho \right]}{\lambda \bar{a}} + \frac{1}{\mu} \qquad (14)$$

3.3. Sistem Antrian pada Waroeng Steak Jatinangor

Secara umum sistem antrian pada Waroeng Steak Jatinangor dapat di dikan sebagai berikut:

1. Terdapat 16 meja yang digunakan untuk melayani suatu pelanggan yang di asumsikan sebagai fasilitas pelayanan atau server.
2. Kapasitas antriannya tidak terbatas.
3. Disiplin pelayanan yang digunakan yaitu FCFS (*Firts Come First Serve*).
4. Pelanggan yang datang langsung memasuki fasilitas pelayanan dan pada saat pelanggan masuk dimulailah perhitungan waktu kedatangan pelanggan.
5. Setelah pelanggan memasuki fasilitas pelayanan, pelanggan akan menunggu untuk suatu pelayanan.
6. Tahap selanjutnya yaitu pelanggan mendapatkan pelayanan, disinilah waktu pelayanan akan dihitung sampai selesainya pelayanan dan setelah pelayanannya selesai pelanggan akan meninggalkan suatu fasilitas pelayanan.

3.3.1. Analisis Model Distribusi

Pada tahap ini akan diidentifikasi distribusi probabilitas pola kedatangan dan pelayanan dengan menggunakan uji kebaikan-suai yaitu Chi-Kuadrat, dimana data yang digunakan adalah data waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan pada antrian pelanggan Waroeng Steak Jatinangor. Penelitian ini dilakukan pada saat salah satu fasilitas pelayanannya mengalami kerusakan atau gangguan, data yang diambil yaitu selama 1 hari pada hari minggu 13 januari 2013 dimana pengamatan dilakukan selama 3 jam yaitu dari jam 13.00-16.00 WIB.

3.3.2. Distribusi Waktu Antar Kedatangan

Dari hasil penelitian dapat dilihat kedatangan pelanggan dimulai pada waktu 00.02.17 dan pelanggan yang datang terakhir yaitu pada waktu 02.45.13. Sebelum melakukan pengujian waktu antar kedatangan, data dikelompokan dalam periode detik.

Langkah-langkah uji waktu antar kedatangannya adalah sebagai berikut:

1. Pengurutan Data

Hasil pengurutan data waktu antar kedatangan disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Waktu Antar Kedatangan yang Telah Diurutkan

10	15	28	28	32	33	34	40	44	46
49	50	60	71	74	75	79	85	96	98
102	126	127	137	137	150	151	158	169	170
172	173	179	186	208	215	219	219	220	227
228	235	242	243	250	251	306	348	350	360
401	485	506	536	683					

2. Banyak Data

$n = 55$

Banyak kelas $(k) = 1 + 3.3 \log n = 1 + 3.3 \log 55 = 6{,}7 \approx 7$

3. Interval Kelas

$IK = \frac{Data\ Terbesar - Data\ Terkecil}{k}$

$= \frac{683-10}{7} = \frac{673}{7} = 96{,}12 \approx 96$

Data hasil analisis distribusi waktu antar kedatangan dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Data Distribusi Frekuensi Waktu Antar Kedatangan

No	IK	O_i	x_i	$O_i x_i$
1	0 - 96	19	48	912
2	97 - 193	15	145	2175
3	194 - 290	12	242	2904
4	291 - 387	4	339	1356
5	388 - 484	1	436	436
6	485 - 581	3	533	1599
7	582 - 683	1	633	633
Jumlah		55		10015

4. Hipotesis

H_0 : Data berdistribusi Eksponensial

H_1 : Data tidak berdistribusi Eksponensial

5. Taraf Signifikan $(\alpha) = 0.05$

6. Derajat Kebebasan $(dk) : k - 1 = 7 - 1 = 6$

7. Menentukan Kriteria Pengujian

H_0 Ditolak jika $x^2_{hitung} \geq x^2_{tabel}$

H_0 Diterima jika $x^2_{hitung} < x^2_{tabel}$

8. Distribusi Probabilitas Eksponensial

$$EXP = \frac{\Delta t}{t_s} e^{-\frac{t}{t_s}}$$

Keterangan :

$\Delta t = IK = 96$

$t_s = \frac{\sum O_i x_i}{\sum O_i} = \frac{10015}{55} = 182.09 \approx 182$

$e = 2{,}7182$

$t = x_i$ = Nilai tengah

9. Frekuensi Teoritis

$$E_i = n \cdot EXP_i$$

10. Chi-Kuadrat

$$x^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Data distribusi kedatangan yang diperoleh dari hasil analisis dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Data Uji Chi-Kuadrat Frekuensi Kedatangan

No	IK	O_i	x_i	$O_i x_i$	EXP_i	E_i	x^2
1	0 – 96	19	48	912	0.41	22.55	0.56
2	97 – 193	15	145	2175	0.24	13.2	0.25
3	194 - 290	12	242	2904	0.14	7.7	2.40
4	291 - 387	4	339	1356	0.08	4.4	0.04
5	388 - 484	1	436	436	0.05	2.75	1.11
6	485 - 581	3	533	1599	0.03	1.65	1.10
7	582 - 683	1	633	633	0.02	1.1	0.01
Jumlah		55		10015			5.470

Sehingga diperoleh $x^2_{hitung} = 5.470$

11. Chi-Kuadrat tabel

$x^2_{tabel} = x^2_{\alpha;dk} = x^2_{0.05;6} = 12.592$

12. Kesimpulan :

Dapat dilihat bahwa $x^2_{hitung} = 5.470$ dan $x^2_{tabel} = 12.592$, artinya:

$x^2_{hitung} < x^2_{tabel}$

$5.470 < 12.592$

Maka H_0 Diterima.

Jadi, waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

3.3.3. Distribusi Waktu Pelayanan

Sebelum melakukan pengujian distribusi waktu pelayanan, data dikelompokan dalam periode waktu 15 menit. Langkah-langkah pengujian distribusi waktu pelayanan:

1. Pengurutan Data

Hasil pengurutan data waktu pelayanan disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Waktu Pelayanan yang Telah Diurutkan

1	2	3	3	4	4
5	5	6	6	7	9

2. Banyak Data

$n = 12$

Banyak kelas $(k) = 1 + 3.3 \log n = 1 + 3.3 \log 12 = 4.56 \approx 5$

3. Interval Kelas

$$IK = \frac{Data\ Terbesar - Data\ Terkecil}{k}$$

$$= \frac{9-1}{5} = \frac{8}{5} = 1.6 \approx 2$$

Data hasil analisis distribusi waktu pelayanan dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Data Distribusi Frekuensi Waktu Pelayanan

No	IK	O_i	x_i	$O_i x_i$
1	0-2	2	1	2
2	3-5	6	3.5	21
3	6-8	3	7	21
4	9-11	1	10	10
5	12-14	0	13	0
Jumlah		12		54

4. Hipotesis

   H_0 : Data berdistribusi Eksponensial

   H_1 : Data tidak berdistribusi Eksponensial

5. Taraf Signifikan $(\alpha) = 0.05$

6. Derajat Kebebasan $(dk) : k - 1 = 5 - 1 = 4$

7. Menentukan Kriteria Pengujian

   H_0 Ditolak jika $x^2_{hitung} \geq x^2_{tabel}$

   H_0 Diterima jika $x^2_{hitung} < x^2_{tabel}$

8. Distribusi Probabilitas Eksponensial

$$EXP = \frac{\Delta t}{t_s} e^{-\frac{t}{t_s}}$$

   Keterangan :

   $\Delta t = IK = 2$

   $t_s = \frac{\sum O_i x_i}{\sum O_i} = \frac{54}{12} = 4.5 \approx 5$

   $e = 2{,}7182$

   $t = x_i$ = Nilai tengah

9. Frekuensi Teoritis

$$E_i = n \cdot EXP_i$$

10. Chi-Kuadrat

$$x^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Data distribusi waktu pelayanan yang diperoleh dari hasil analisis dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Data Uji Chi-Kuadrat Frekuensi Waktu Pelayanan

No	IK	O_i	x_i	$O_i x_i$	EXP_i	E_i	x^2
1	0-2	2	1	2	0.33	3.96	0.97
2	3-5	6	3.5	21	0.20	2.4	2.4
3	6-8	3	7	21	0.10	1.2	2.7
4	9-11	1	10	10	0.05	0.6	0.27
5	12-13	0	13	0	0.03	0.36	0.004
Jumlah		12		54			6.344

Sehingga diperoleh $x^2_{hitung} = 6.344$

11. Chi-Kuadrat tabel

    $x^2_{tabel} = x^2_{\alpha;dk} = x^2_{0.05;4} = 9.488$

12. Kesimpulan :

    Dapat dilihat bahwa $x^2_{hitung} = 6.344$ dan $x^2_{tabel} = 9.488$, artinya:

$$x^2_{hitung} < x^2_{tabel}$$

$$6.344 < 9.488$$

    Maka H_0 Diterima.

    Jadi, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

3.3.4. Analisis Model Antrian Multi Server pada Persoalan Gangguan Pelayanan dengan Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

Dari hasil pengujian distribusi waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan didapat bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial dan waktu pelayanan juga berdistribusi Eksponensial, dengan demikian dapat diketahui bahwa model untuk sistem antrian tersebut adalah $(M^{[x]}/M/C):(FCFS/\sim/\sim)$.

Dikarenakan dalam salah satu fasilitas pelayanannya mengalami gangguan pelayanan maka fasilitas pelayanannya dari C fasilitas pelayanan menjadi $C-1$. Sehingga model sistem antrian untuk kedatangan berkelompok dengan gangguan pelayanan adalah $(M^{[x]}/M/C; C-1/FCFS)$. Artinya sistem antrian ini mempunyai pola kedatangan berkelompok dan pelayanan yang masing-masing berdistribusi Eksponensial.

Untuk model antrian waroeng steak jatinangor sebelum mengalami gangguan pelayanan adalah $(M^{[x]}/M/16):(FCFS/\sim/\sim)$. Setelah mengalami gangguan pelayanan model antriannya menjadi $(M^{[x]}/M/15):(FCFS/\sim/\sim)$. Berikut ini adalah analisis model antrian yang akan diuraikan secara rinci:

1. Rata-rata ukuran kelompok yang datang

   Pelanggan-pelanggan yang datang ke dalam sistem antrian yaitu secara berkelompok, dengan ukuran setiap kedatangannya tidak pasti banyaknya. Sehingga akan dicari rata-rata ukuran kelompoknya. Berdasarkan persamaan (5), rata-rata ukuran kelompok yang masuk kedalam sistem adalah:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

   Dari persamaan (2) diketahui:

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$$

   Berdasarkan dari data yang diperoleh, maka:

$a_2 = (X = 2) = \frac{30}{55}$

$a_3 = (X = 3) = \frac{14}{55}$

$a_4 = (X = 4) = \frac{6}{55}$

$a_5 = (X = 5) = \frac{5}{55}$

$E(X) = 2\left(\frac{30}{55}\right) + 3\left(\frac{14}{55}\right) + 4\left(\frac{6}{55}\right) + 5\left(\frac{5}{55}\right)$

$= \frac{60}{55} + \frac{42}{55} + \frac{24}{55} + \frac{25}{55}$

$= \frac{151}{55} = 2.7 \approx 3$

Jadi rata-rata ukuran kelompok yang masuk kedalam sistem antrian adalah $K = 3$.

2. Rata-rata pelanggan yang datang

$\lambda = \frac{Banyak\ kelompok\ pelanggan\ yang\ datang}{lama\ waktu\ pengamatan}$

$= \frac{55}{3} = 18.3 \approx 18\ pelanggan/jam$

3. Rata-rata pelanggan yang dilayani

$\mu = \frac{151}{3} = 50.3 \approx 50\ pelanggan/jam$

4. Traffic Intensity atau peluang *server* sibuk

$\rho = \frac{\lambda \bar{a}}{c\mu} = \frac{18(3)}{(15)50} = \frac{54}{750} = 0.072$

5. Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian

$L_q = \frac{1}{c(1-\rho)} \sum_{n=1}^{c-1} n(c-n)P_n + \frac{\rho}{2(1-\rho)}\left\{\frac{E(X^2)}{E(X)} - 1\right\} + \frac{\rho}{(1-\rho)} - c\rho$

$L_q = \frac{1}{15(1-0.072)}(6.06) + \frac{0.072}{2(1-0.072)}\left\{\frac{9}{3} - 1\right\} + \frac{0.072}{(1-0.072)} - 15 \cdot 0.072$

$L_q = 0.44 + 0.078 + 0.078 - 1.08 = -0.484$

Artinya, tidak ada pelanggan yang menunggu dalam antrian.

6. Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem

$L_s = L_q + \frac{\lambda \bar{a}}{\mu}$

$L_s = (-0.484) + \frac{18 \cdot 3}{50} = 0.596$

Artinya, rata-rata pelanggan yang berada dalam sistem adalah 0.596

7. Rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian

$W_q = \frac{L_q}{\lambda \bar{a}}$

$W_q = \frac{-0.484}{18 \cdot 3} = 0$

jadi, rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian adalah 0. Artinya tidak ada satupun pelanggan yang mengantri.

8. Rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem

$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

$W_s = 0 + \frac{1}{50} = 0.02$

Artinya, rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem adalah 0.02.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil penelitian, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Sistem antrian pada waroeng steak jatinangor pada persoalan gangguan pelayanan dengan rata-rata ukuran kelompoknya $k = 3$ adalah $(M^3/M/15):(FCFS/\sim/\sim)$. Peluang kesibukan servernya atau traffic intensity adalah $\rho = 0.072$.
2. Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (L_q) adalah -0.484, artinya pada waroeng steak tersebut tidak terdapat antrian. Untuk rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem (L_s) adalah 0.596, Artinya jumlah pelanggan yang menunggu dalam sistem pada waroeng steak jatinangor yaitu mempunyai jumlah antrian yang sangat kecil.
3. Rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian (W_q) adalah 0, dikarenakan tidak ada pelanggan yang mengantri maka untuk rata-rata waktu tunggunya yaitu 0. Untuk rata-rata waktu tunggu dalam sistem (W_s) adalah 0.02, artinya waktu tunggu dalam sistem sangatlah kecil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahmed M, M. Sultan. Jurnal: *Multi-Channel BI-Level Heterogeneous Servers Bulk Arrival Queueing System With Erlangian Service Time.* Mathematical and Computational Applications, Vol. 12, No. 2, pp. 97-105, 2007.

[2] A. M. Sultan, N. A. Hassan and N. M. Elhamy. Jurnal: *Computational*

Analysis Of A Multi-Server Bulk Arrival With Two Modes Server Breakdown. Mathematical and Computational Applications, Vol. 10, No. 2, pp. 249-259, 2005.

[3] Anaviroh. *Model Antrian Satu Server Dengan Pola Kedatangan Berkelompok (Batch Arrival)*. Paper, Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Yogyakarta, 2011.

[4] C.M. Haris and D. Gross. *Fundamentals Of Queuing Theory*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1974.

[5] H.C. Tijms. *A First In Stochastic Models*. John Wiley & Sons, 2003.

[6] J, Dharma Lesmono. Jurnal: *Model Antrian* $M^{[H]}/G/1$, Vol. 6, No. 2 Oktober 2001.

[7] Ross, S. M. *Stochastic Processes (Second Edition)*. New York. John Wiley & Sons. 1966

[8] Supranto, Johanes. *Riset Operasi untuk Penganbilan Keputusan*. Edisi Revisi. Jakarta: UI-Press, 2006.

[9] Siagian, P. *Penelitian Operasional*. Jakarta: Universitas Indonesia (UI-Press), 1987.

[10] Subagio. Pangestu, Asri. Marwan, Handoko. T. Hani. *Dasar-Dasar Operational Research*. Edisi Kedua. Yogyakarta: BPFE Yogyakarta, 1985.

[11] Syahrini utami, Alvy. Jurnal: *Simulasi Antrian Satu Channel Dengan Tipe kedatangan Berkelompok*. Fakultas Ilmu Komputer-Universitas Sriwijaya Vol. 4, No. 1 Januari 2009.

[12] Taha Hamdi A. *Riset Operasi suatu pengantar*. Jilid 2. Terjemahan Drs.Daniel Wirajaya, BinaRupa Aksara, 1996.

[13] Walpole, Ronald, E dan Myers, Raymond, H. *Ilmu Peluang dan Statistika Insiyur dan Ilmuan Edisi ke-4*. Bandung: ITB. 1995.

[14] Winston, Wayne L. *Operational Research: Aplication and Algorithms*, Third Edition, Duxbury Press: An Imprint Of Wardsworth Publishing Compani, Belmont California.