STUDI PEMBENTUKAN PROSES TITIK MELALUI PENDEKATAN UKURAN MENGHITUNG

Rini Cahyandari
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SGD Bandung
email: rcahyandari@yahoo.com

ABSTRAK

Proses titik didefinisikan sebagai koleksi acak dari titik-titik yang terletak pada suatu daerah tertentu, dimana pembentukan proses ini dapat dilakukan dengan beberapa pendekatan, salah satunya melalui ukuran menghitung. Dari segi matematika, jika dikaitkan dengan masalah perhitungan, proses Poisson merupakan contoh trivial dari proses titik. Karenanya, proses Poisson didefinisikan sebagai proses titik sederhana, dimana banyaknya kejadian pada suatu himpunan mengikuti distribusi Poisson dan banyaknya kejadian pada himpunan yang saling lepas adalah saling bebas. Berkaitan dengan pendekatan ukuran menghitung, prosedur perhitungan banyaknya titik dapat dilakukan melalui dua cara partisi himpunan, yaitu partisi dengan bentuk sebangun indeks parameter waktu, bidang dan ruang, yang diterapkan pada data pohon pinus berdaun panjang di hutan Wade Tract Georgia, dan partisi menggunakan konsep pengemasan bola (*sphere packing*). Aplikasi dari proses titik yang dibentuk melalui pendekatan ukuran menghitung dapat ditemukan di beberapa bidang, yaitu 1) bidang asuransi, khususnya pada pembuatan tabel kehidupan, dimana titik dari proses didefinisikan sebagai waktu individu meninggal 2) bidang fisika, untuk menghitung populasi partikel akibat benturan dua buah partikel utama, dimana titik dari proses didefinisikan sebagai partikel yang diidentifikasi berdasarkan kekuatan energi yang dimiliki 3) bidang demografi yang mempelajari perubahan populasi, dimana titik dari proses dapat didefinisikan sebagai kejadian kematian, kelahiran, migrasi dan emigrasi.

Keywords: proses titik, ukuran menghitung, proses Poisson, partisi himpunan dengan bentuk sebangun, pengemasan bola

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, yang menjadi perhatian seringkali bukan bagaimana suatu peristiwa itu terjadi, tetapi seberapa sering (banyaknya) peristiwa tersebut terjadi pada suatu interval waktu atau area tertentu. Misal banyaknya gempa yang terjadi selama interval waktu 30 menit, banyaknya rumah yang roboh akibat banjir atau longsor, banyaknya pohon pinus dengan diameter tertentu yang tersebar di sebuah hutan, banyaknya spesies tertentu yang habis terbakar di sebuah hutan yang rawan kebakaran, dan lain sebagainya. Dalam proses stokastik, pengamatan di atas dapat dikategorikan sebagai *proses menghitung*. Ruang keadaan dan indeks parameter dari proses menghitung ini masing-masing adalah himpunan bulat non negatif dan himpunan bagian dari $\Re^d$ dengan $d \geq 1$. Selanjutnya, masalah perhitungan ini umumnya dianalisis melalui proses stokastik Poisson.

Meskipun demikian, dalam praktek seringkali ditemukan peristiwa yang terjadi secara bersamaan, seperti gempa bumi, dengan titik lokasi gempa yang saling berdekatan atau bertetangga. Sehingga, proses Poisson tidak sesuai lagi digunakan untuk menganalisis keadaan seperti ini. Alasan ini yang mendasari suatu kajian tentang proses titik , dimana didefinisikan sebagai koleksi acak dari titik-titik yang terletak pada suatu area tertentu **[5]**. Titik-titik dari proses bisa dinyatakan sebagai kejadian, waktu kejadian, lokasi kejadian maupun keduanya.

Secara analisis, membentuk proses titik dapat dilakukan melalui 4 (empat) pendekatan, yaitu pendekatan ukuran menghitung, fungsi tangga, barisan titik, dan barisan interval. Pada studi ini, pendekatan ukuran menghitung akan dibahas lebih dalam, karena ukuran menghitung merupakan pendekatan paling sistematis jika ruang dimensi proses diperluas **[1]**.

Dari segi matematika, jika dikaitkan dengan masalah perhitungan, proses Poisson merupakan contoh trivial dari proses titik. Karenanya, proses Poisson didefinisikan sebagai proses titik sederhana[1], dimana banyaknya kejadian

[1] Proses titik disebut sederhana (*simple*) jika semua titik dari proses berbeda, atau $t_i \neq t_j$ untuk $i \neq j$

pada suatu himpunan mengikuti distribusi Poisson dan banyaknya kejadian pada himpunan yang saling lepas adalah saling bebas **[5]**.

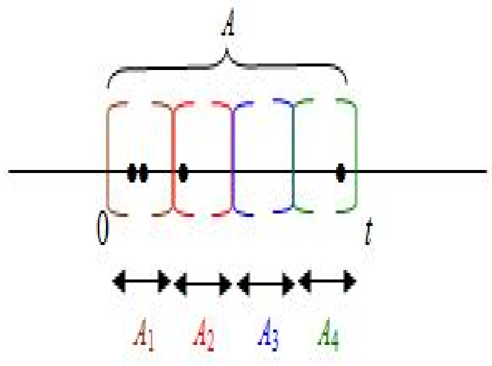
Untuk dapat menjelaskan prosedur pembentukan proses titik secara lebih sederhana, maka pada studi ini, diambil proses yang didefinisikan di $\Re$ dengan beberapa batasan, diantaranya: 1) hasil proses menghitung pada himpunan tertutup dan terbatas bernilai bulat nonnegatif dan hingga 2) proses menghitung memiliki sifat kenaikan bebas.

Aplikasi dari proses titik yang dibentuk melalui pendekatan ukuran menghitung dapat ditemukan di beberapa bidang, yaitu bidang asuransi pada pembuatan table kehidupan, bidang fisika pada kejadian benturan dua buah partikel fisik, dan bidang demografi pada perubahan populasi akibat beberapa faktor seperti kematian, kelahiran, migrasi dan emigrasi.

2. PROSES MENGHITUNG

Proses stokastik $\{N(A),\ A \subseteq \Re^d,\ d \geq 1\}$ disebut proses menghitung jika $N(A)$ menyatakan banyaknya (*number*) kejadian yang terjadi pada sembarang himpunan A, di mana bisa berupa:

1. Interval waktu, mengingat ukurannya berupa panjang interval waktu. Misalkan himpunan $A = [0,t]$ yang diilustrasikan pada Gambar 1, maka himpunan A bisa dinyatakan dengan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq t\}$.

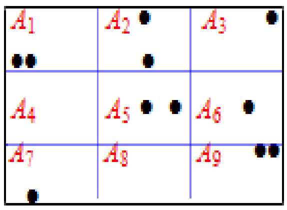


Gambar 1 Partisi Himpunan $A = [0,t]$

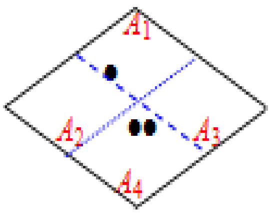
2. Himpunan di $\Re^2$. Misal segiempat, segitiga, lingkaran, atau ellips, seperti

diilustrasikan pada Gambar 2. Himpunan A dari Gambar 2(a) dan 2(e) masing-masing bisa dinyatakan dengan $A = \{ (x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d \}$ dan $A = \{ (x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r \}$.

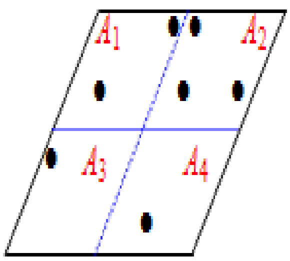
(a)



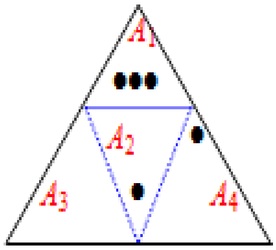
(b)



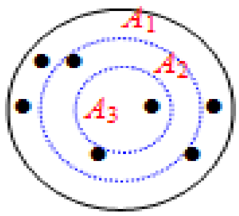
(c)



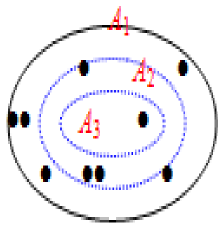
(d)



(e)

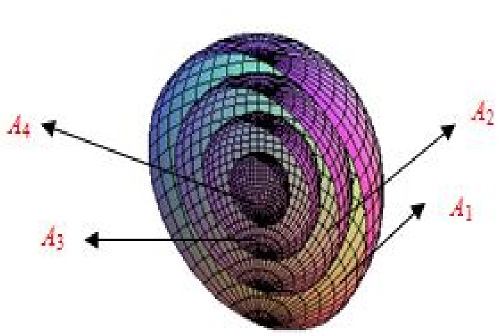


(f)

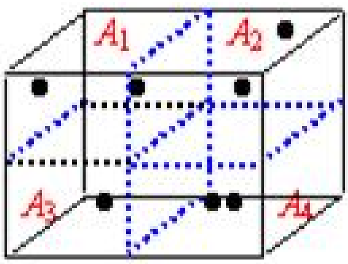


Gambar 2 Partisi Himpunan A di $\Re^2$

3. Himpunan di $\Re^3$. Misal bola dan kubus, seperti diilustrasikan pada Gambar 3. Himpunan A dari Gambar 3(a) bisa dinyatakan dengan $A = \{(x, y, z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le r \}$.



(a)



(b)

Gambar 3 Partisi Himpunan A di $\Re^3$

Proses menghitung yang umum digunakan adalah proses dengan indeks parameter A seperti Gambar 1 di atas. Jadi, proses menghitung $N[0,t]$ didefinisikan tidak lain sebagai banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t **[3]**. Untuk penyederhanaan, $N[0,t]$ cukup ditulis dengan $N(t)$. Proses menghitung $N(t)$ ini akan memenuhi 4 sifat, yaitu:

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ bernilai bulat
3. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$
4. Untuk $s < t$, maka $N(t)$ - $N(s)$ akan menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval $(s,t]$

3. PROSES POISSON

Definisi 1:

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dapat dikatakan sebagai proses Poisson homogen dengan laju λ, $\lambda > 0$ jika:

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses memiliki kenaikan bebas

(iii) Banyaknya kejadian pada sebuah interval yang panjangnya t berdistribusi Poisson dengan rataan λt. Sehingga untuk semua $s,t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

di mana $n = 0, 1, \ldots$

Definisi 2:

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dapat dikatakan sebagai proses Poisson homogen dengan laju λ, $\lambda > 0$ jika:

ISSN 1979-8911

(i) $N(0) = 0$

(ii) Proses memiliki kenaikan bebas dan stasioner

(iii) $P\{N(h)=1\} = \lambda h + o(h)$

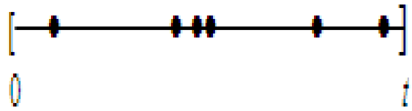
(iv) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

4. PROSES TITIK

Perdefinisi, proses titik adalah koleksi acak dari titik-titik yang terletak pada suatu daerah tertentu **[5]**. Berdasarkan daerah definisinya, maka proses titik dibagi menjadi dua, yaitu:

4.1 Proses Titik pada Ruang Dimensi Satu

Pada umumnya, indeks parameter proses adalah waktu, di mana titiknya menyatakan waktu dari suatu kejadian. Proses ini dikenal dengan istilah proses titik bergantung waktu (*temporal point processes*). Proses titik ini, biasanya dipakai pada permasalahan antrian



Gambar 4 Titik-titik Kedatangan dalam Antrian

Gambar di atas mengilustrasikan proses titik bergantung waktu, di mana titiknya merepresentasikan waktu kedatangan dalam suatu antrian.

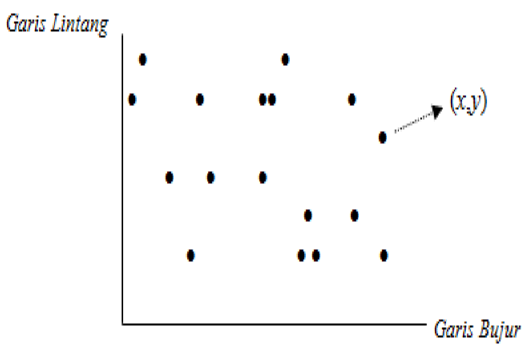
4.2 Proses Titik pada Ruang Dimensi Lebih dari Satu

4.2.1 Proses Titik Bergantung Lokasi (*Spatial Point Processes*)

Proses ini umumnya diamati berdasarkan lokasi, di mana titiknya menyatakan lokasi dari suatu kejadian. Proses titik ini, dipakai pada permasalahan kehutanan, misal lokasi pohon yang terbakar, pada masalah gempa bumi, misal pusat (*epicenter*) dari gempa dan lain sebagainya. Ambil contoh dalam

 ISSN 1979-8911

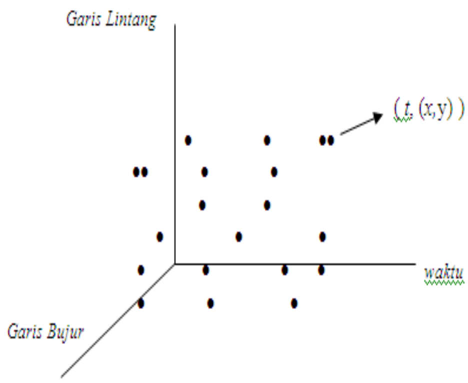
masalah gempa bumi, maka titik dari proses dinyatakan dengan pasangan (x,y) di mana x menyatakan garis bujur (*longitude*) dan y menyatakan garis lintang (*latitude*).



Gambar 5 Titik Lokasi Gempa Bumi

4.2.2 Proses Titik Bergantung Waktu dan Lokasi (*Spatial Temporal Point Processes*)

Proses titik dengan indeks parameter berupa pasangan waktu dan lokasi. Proses titik ini, dipakai pada permasalahan seperti proses titik bergantung lokasi. Tetapi bedanya, titik dari proses ini menyatakan waktu dan lokasi dari kejadian. Ambil contoh masalah gempa bumi, maka titik dari proses menyatakan pasangan (t,z) di mana t menyatakan waktu dari kejadian dan z menyatakan lokasi dari kejadian, yaitu pasangan (x,y) dengan x garis bujur dan y garis lintang.



Gambar 6 Titik Waktu dan Lokasi Gempa Bumi

5. PROSES TITIK MELALUI PENDEKATAN UKURAN MENGHITUNG

Membangun proses titik melalui empat pendekatan lebih mudah jika prosesnya didefinisikan pada ruang berdimensi 1 dan indeks parameternya berupa waktu. Akan tetapi, jika dimensinya diperluas, hanya ukuran menghitung yang menjadi pendekatan paling mudah untuk dikaji dan diambil contoh nyatanya.

Dalam literatur, proses menghitung yang sering dibahas adalah proses dengan indeks parameter A seperti Gambar 1 di atas. Jadi, proses menghitung $N[0,t]$ didefinisikan tidak lain sebagai banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t **[3]**. Untuk penyederhanaan, $N[0,t]$ cukup ditulis dengan $N(t)$. Proses menghitung $N(t)$ ini akan memenuhi 4 sifat, yaitu:

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ bernilai bulat
3. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$
4. Untuk $s < t$, maka $N(t) - N(s)$ akan menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval $(s,t]$

5.1 Partisi Himpunan

5.1.1 Partisi Himpunan dengan Bentuk Sebangun (Indeks Parameter Waktu)

Didefinisikan himpunan $A = [0,t]$, maka salah satu bentuk partisinya diilustrasikan seperti Gambar 1. Partisi interval A berupa subinterval A_i yang saling lepas untuk i = 1,2,3,4. Selanjutnya, dapat dihitung $N(A_1)$ = 2 kejadian, $N(A_2)$ = 1 kejadian, $N(A_3)$ = tidak ada kejadian, dan $N(A_4)$ = 1 kejadian. Sehingga $N(A)$ = 4 kejadian.

5.1.2 Partisi Himpunan dengan Bentuk Sebangun (Indeks Parameter Bidang)

Didefinisikan himpunan A sebagai segiempat, segitiga, lingkaran, dan ellips. Ilustrasi dari partisi himpunan A ini dapat dilihat pada Gambar 2, di mana partisi himpunan A berupa himpunan yang sebangun dengan panjang sisinya lebih pendek. Perhitungan banyaknya kejadian pada himpunan A berupa penjumlahan dari banyaknya kejadian di setiap partisi sebangunnya.

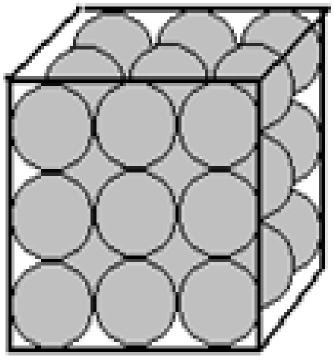
ISSN 1979-8911

5.1.3 Partisi Himpunan dengan Bentuk Sebangun (Indeks Parameter Ruang)

Didefinisikan himpunan *A* sebagai bola dan kubus yang diilustrasikan pada Gambar 3, di mana partisi himpunan *A* yang didefinisikan sebagai bola berupa bola-bola baru yang lebih kecil jari-jarinya. Sedangkan, partisi himpunan *A* yang didefinisikan sebagai kubus berupa kubus-kubus baru yang panjang sisinya lebih pendek. Perhitungan banyaknya kejadian pada himpunan *A* dilakukan dengan cara menjumlahkan banyaknya kejadian pada masing-masing partisinya.

5.1.4 Partisi Himpunan Menggunakan Konsep Pengemasan Bola (*Sphere Packing*)

Secara matematika, permasalahan pengemasan bola adalah permasalahan mengisi sebuah ruang dengan cara menyusun bola-bola identik yang saling lepas sehingga mendapatkan susunan yang maksimal.

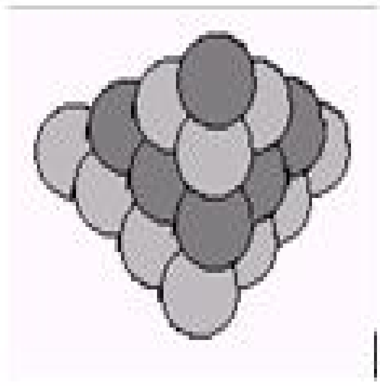


Gambar 7 Susunan Bola pada Sebuah Kotak

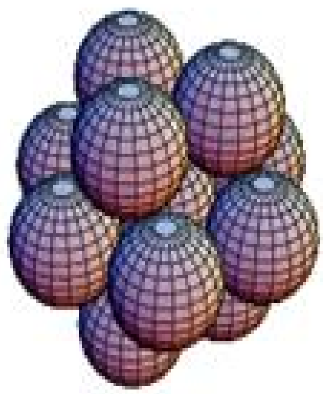
Bentuk susunan dalam pengemasan bola yang memiliki kepadatan maksimal adalah bentuk susunan *cubic close packing*[2] (atau *face centred cubic*) dan *hexagonal closes packing*.

[2] Salah satu contoh dari *cubic close packing* adalah susunan bola dalam bentuk piramida

ISSN 1979-8911



Gambar 8 *Cubic Close Packing*



Gambar 9 *Hexagonal Closes Packing*

Dengan cara yang sama seperti pada partisi himpunan dengan bentuk yang sebangun, perhitungan banyaknya kejadian menggunakan cara partisi ini dilakukan dengan menjumlahkan hasil perhitungan banyaknya kejadian di masing-masing partisinya.

5.2 Aplikasi Proses Titik

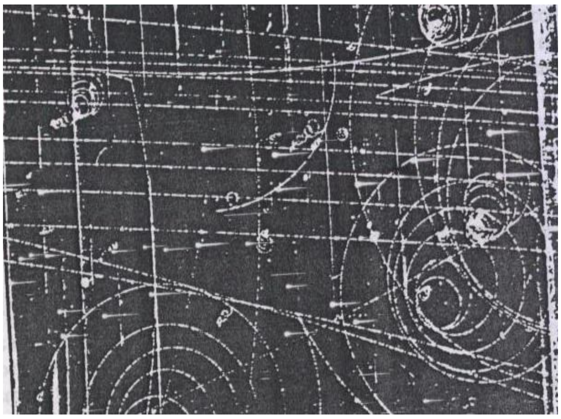
Beberapa aplikasi dari proses titik melalui pendekatan ukuran menghitung di beberapa bidang ilmu, diantaranya:

1) Bidang Asuransi

Khususnya pada pembuatan tabel kehidupan, di mana tabelnya memuat daftar dari banyaknya individu yang bertahan hidup pada usia tertentu, dengan asumsi jumlah individu awal dari suatu populasi diberikan. Misalkan individu awal dari suatu populasi diasumsikan sebanyak 100.000 orang. Dalam interval waktu satu tahun, individu yang bertahan hidup sebanyak 99.721 orang, maka banyaknya yang meninggal adalah 279 orang. Jadi, di sini himpunan *A* didefinisikan sebagai interval waktu satu tahun dan kejadiannya didefinisikan sebagai individu yang meninggal.

2) Bidang Fisika

Misalkan 2 (dua) buah partikel fisik berbenturan, menghasilkan jejak dan partikel-partikel lainnya, sebut partikel *w* dan partikel *z*, yang direkam dalam bentuk foto.



Gambar 10 Foto Jejak dan Partikel Hasil Benturan

Titik-titik pada Gambar 10 menyatakan partikel, di mana identifikasi jenis partikel berdasarkan kekuatan energi yang dimilikinya. Sedangkan, bentuk lingkaran yang semakin lama semakin mengecil menyatakan jejak partikelnya. Berdasarkan hasil foto, jumlah dari jenis partikel tertentu bisa dihitung. Jadi, di sini himpunan *A* didefinisikan sebagai sebuah foto dan kejadiannya didefinisikan sebagai jenis partikel hasil benturan.

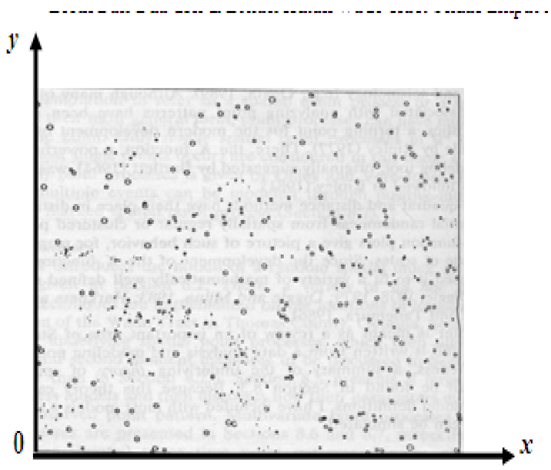
3) Bidang Demografi

Demografi adalah ilmu yang mempelajari perubahan populasi terhadap beberapa faktor, diantaranya kelahiran, kematian, migrasi dan emigrasi. Jadi, di sini himpunan *A* didefinisikan sebagai interval waktu pengamatan dan kejadiannya bisa didefinisikan sebagai populasi maupun faktor yang mempengaruhinya.

5.3 Studi Kasus

Studi kasus dilakukan dengan mengambil data pohon pinus berdaun panjang yang tersebar di hutan Wade Tract, Thomas County, Georgia. Luas hutan yang diambil sebagai lokasi pengamatan sebesar empat hektar, di mana tersebar 584 pohon pinus berdaun panjang dengan diameter lebih dari 2 dbh. Setiap pohon terletak di koordinat yang berbeda-beda, seperti yang diilustrasikan oleh Gambar berikut ini:

ISSN 1979-8911



Gambar 11 Peta Penyebaran Pohon Pinus Berdaun Panjang dengan Diameter Lebih dari 2 dbh di Lokasi Hutan Wade Tract

di mana setiap lingkaran pada Gambar 11 di atas, memuat koordinat (satuan meter) dari pohon pinus. Sebagai penyederhanaan perhitungan, data pohon pinus yang diambil untuk dianalisis memiliki diameter 2-10 dbh.

Adapun prosedur perhitungannya dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

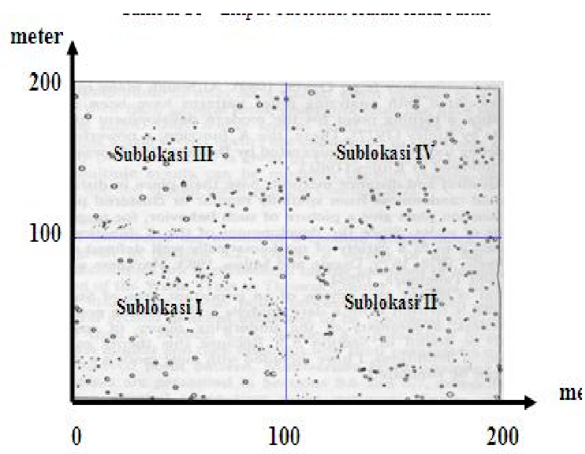
1. Partisi lokasi hutan menjadi empat sublokasi, di mana masing-masing sublokasi memiliki luas sebesar satu hektar. Konsep partisi menggunakan bentuk yang sebangun.
2. Klasifikasikan pohon pinus sesuai dengan koordinat setiap sublokasi
3. Hitung jumlah pohon pinus yang tersebar pada masing-masing sublokasi

Hasil yang diperoleh dari langkah-langkah di atas adalah:

Tabel 1 Empat Sublokasi Hutan Hasil Partisi:

Sublokasi I	$\{((x,y),D) \mid 0 \le x \le 100, 0 \le y \le 100, D = \text{diameter pohon}\}$
Sublokasi II	$\{((x,y),D) \mid 100 \le x \le 200, 0 \le y \le 100, D = \text{diameter pohon}\}$
Sublokasi III	$\{((x,y),D) \mid 0 \le x \le 100, 100 \le y \le 200, D = \text{diameter pohon}\}$
Sublokasi IV	$\{((x,y),D) \mid 100 \le x \le 200, 100 \le y \le 200, D = \text{diameter pohon}\}$

dan diilustrasikan oleh Gambar 12 berikut ini:



Gambar 12 Empat Sublokasi Hutan Hasil Partisi

Jumlah pohon pinus di masing-masing sublokasi sebagai berikut:

Tabel 2 Jumlah Pohon Pinus di Setiap Sublokasi

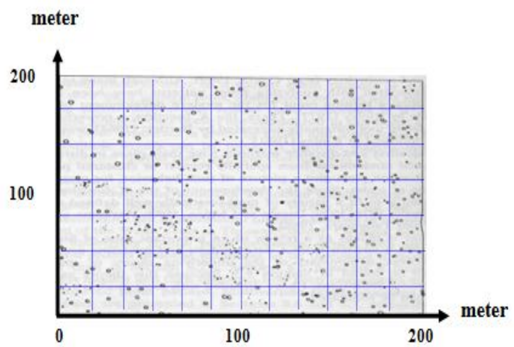
Jumlah pohon pinus berdaun panjang dengan diameter 2-10 dbh			
Sublokasi I	Sublokasi II	Sublokasi III	Sublokasi IV
6 pohon	46 pohon	72 pohon	66 pohon

Tabel 3 Intensitas Pohon Pinus di Setiap Sublokasi

Intensitas pohon pinus berdaun panjang dengan diameter 2-10 dbh			
Sublokasi I	Sublokasi II	Sublokasi III	Sublokasi IV
6 pohon/hektar	46 pohon/hektar	72 pohon/hektar	66 pohon/hektar

Berdasarkan Tabel 3, intensitas pohon pinus di sublokasi I adalah 6 pohon/hektar, disublokasi II adalah 46 pohon/hektar, disublokasi III adalah 72 pohon/hektar dan disublokasi IV adalah 66 pohon/hektar. Sehingga, intensitas pohon pinus di lokasi hutan seluas empat hektar adalah 190 pohon/empat hektar. Dengan kata lain, proporsi pohon pinus yang tersebar di area hutan tersebut adalah 32.53 %.

Hasil yang berbeda bisa diperoleh, yaitu dengan melakukan partisi lokasi hutan sekecil mungkin, seperti yang diilustrasikan melalui Gambar 13 berikut ini:



Gambar 13 Partisi Lokasi Hutan yang Diperkecil

Semakin diperkecil partisinya, maka banyaknya pohon pinus yang tersebar pada sublokasi tersebut kemungkinan hanya ada satu pohon ataupun tidak ada sama sekali. Artinya intensitas untuk masing-masing

ISSN 1979-8911

sublokasi juga berbeda-beda. Karenanya, contoh proses menghitung pohon pinus yang paling mudah untuk kasus yang diperlihatkan melalui Gambar 13 adalah proses Poisson nonhomogen.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Daley D.J and Vere-Jones D. 2003. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer. USA.

[2] Griffiths D. 1987. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

[3] Ross S. 1996. *Stochastic Processes*: 2*nd* *Edition*. John Wiley & Sons, Inc. USA.

[4] Sokal R.R and Rohlf F.J (1981). Biometry: 2nd *Edition*. W.H. Freeman and Company. USA.

[5] Schoenberg F.P. 2000. *Point Processes, Lecture Notes*. UCLA Department of Statistics