ISSN 1979-8911

NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TOTAL DARI DUA *COPY* GRAF BINTANG

Rismawati Ramdani

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Gunung Djati Bandung
rismawatiramdani@gmail.com,

Abstrak

Misalkan graf $G = (V, E)$ dan k adalah suatu bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada *G* adalah suatu pemetaan $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$. Bobot sisi uv di bawah pemetaan f, dinotasikan dengan $w_f(uv)$ dan didefinisikan sebagai $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$. Bobot titik v di bawah pemetaan f, dinotasikan dengan $w_f(v)$ dan didefinisikan sebagai $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$. Suatu pelabelan-$k$ total pada G dikatakan tak teratur sisi atau tak teratur titik, berturut-turut, jika bobot setiap sisi berbeda atau bobot setiap titik berbeda. Nilai total ketakteraturan sisi dari G, dinotasikan dengan $tes(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga suatu graf *G* memiliki pelabelan-k total tak teratur sisi. Nilai total ketakteraturan titik dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga suatu graf *G* memiliki pelabelan-k total tak teratur titik. Dua pelabelan tersebut diperkenalkan oleh Bača, Jendroľ, Miller, dan Ryan pada tahun 2007. Selanjutnya, Marzuki, Salman, dan Miller mengkombinasikan kedua pelabelan di atas ke dalam suatu pelabelan baru yang dinamai pelabelan-k total tak teratur total. Suatu pelabelan-k total pada G dikatakan tak teratur total, jika bobot setiap sisi berbeda dan bobot setiap titik berbeda. Nilai total ketakteraturan total dari G, dinotasikan dengan $ts(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total. Pada makalah ini, ditentukan nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang.

Kata kunci : graf bintang, nilai total ketakteraturan sisi, nilai total ketakteraturan titik, nilai total ketakteraturan total, pelabelan total tak teratur total

I.Pendahuluan

Misalkan diberikan suatu graf $G = (V, E)$. Pelabelan pada G didefinisikan sebagai suatu pemetaan unsur-unsur G pada himpunan bilangan bulat. Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Jika suatu pelabelan hanya melabeli titik, maka

ISSN 1979-8911

pelabelan semacam ini disebut pelabelan titik. Begitu juga dengan pelabelan sisi hanya melabeli sisi. Jika suatu pelabelan melabeli titik dan sisi, maka pelabelan ini disebut pelabelan total. Pelabelan graf, yang dimulai pada tahun 1963 oleh Sadlacek, merupakan salah satu topik dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian. Pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya adalah pelabelan *graceful*, pelabelan cermin, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Studi tentang aplikasinya juga telah dilakukan, diantaranya pada teori koding, kristalografi sinar-x, penyimpanan data komputer, sistem jaringan komunikasi, dan desain sirkuit.

Pada tahun 2007, Bača, Jendrol̆, Miller, dan Ryan [1] memperkenalkan pelabelan-k total tak teratur yang mempunyai dua tipe yakni pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur titik. Misalkan diberikan suatu graf $G = (V, E)$. Untuk suatu bilangan bulat k, pelabelan-k total tak teratur sisi pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$. Nilai $w_f(uv)$ disebut bobot sisi uv. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur sisi, dinotasikan dengan $tes(G)$, disebut nilai total ketakteraturan sisi dari G. Untuk suatu bilangan bulat k, pelabelan-k total tak teratur titik pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ yang memenuhi $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Nilai $w_f(v)$ disebut bobot titik v. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur titik, dinotasikan dengan $tvs(G)$, disebut nilai total ketakteraturan titik dari G .

Mengkombinasikan kedua pelabelan di atas, Marzuki, Salman, dan Miller [3] memperkenalkan suatu pelabelan baru, yaitu pelabelan-k total tak teratur total. Pelabelan-k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total, dinotasikan dengan $ts(G)$, disebut nilai total ketakteraturan total dari G. Pada makalah tersebut, Marzuki, dkk memberikan batas bawah dari $ts(G)$ dan nilai $ts(G)$ untuk G graf lintasan dan graf lingkaran.

Pelabelan total tak teratur total relatif masih baru diperkenalkan, sehingga membuka peluang bagi peneliti untuk mengkajinya lebih dalam. Pada makalah ini, ditentukan nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang.

II. kajian pustaka

2.1. Beberapa Pengertian Dasar pada Teori Graf

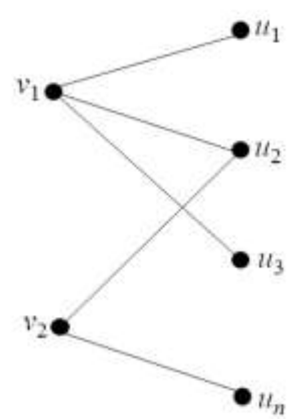
Definisi 2.1. [2] Misalkan P adalah himpunan berhingga yang tak kosong. Maka $[P]^2 = \{\{u,v\}|u,v \in P\}$.

Suatu graf $G = (V,E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik $V \neq \emptyset$ dan himpunan sisi $E \subseteq [V]^2$. Secara grafis, angggota himpunan titik digambarkan oleh titik, sedangkan anggota himpunan sisi, misalkan $e = \{u,v\}$, digambarkan oleh sisi yang menghubungkan u dan v di $V(G)$. Bila titik u dan v terhubung oleh suatu sisi e di G, maka titik u dan v dikatakan bertetangga di G, dan u dan v disebut titik ujung dari e. Selanjutnya, sisi $e = \{u,v\}$ dapat dituliskan sebagai uv. [2]

Banyaknya anggota dari $V(G)$, dinotasikan dengan $|V(G)|$, disebut orde dari G, sedangkan banyaknya anggota dari $E(G)$, dinotasikan dengan $|E(G)|$, disebut ukuran dari G. [2]

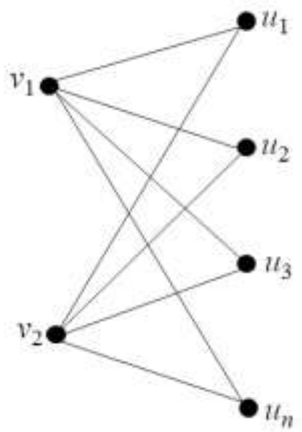
Banyaknya sisi yang terhubung dengan suatu titik $v \in V(G)$, dinotasikan dengan $d_G(v)$, disebut sebagai derajat titik v. Derajat terkecil pada suatu graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat terbesar pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. [2]

Definisi 2.2 [2] Suatu graf G disebut graf bipartit jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan suatu titik di X ke suatu titik di Y.



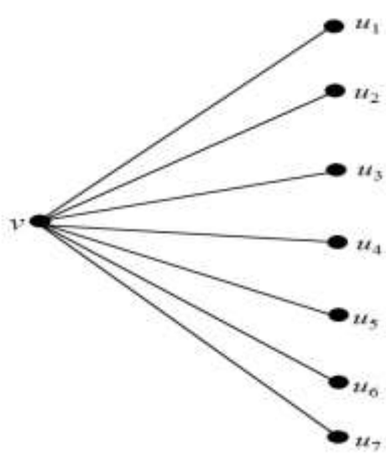
Gambar 2.1 Graf bipartit

Definisi 2.3 [2] Suatu graf bipartit G disebut graf bipartit lengkap jika setiap titik di X bertetangga dengan setiap titik di Y. Jika banyaknya titik di X adalah m dan banyaknya titik di Y adalah n, maka graf bipartit G dinotasikan dengan $K_{m,n}$.



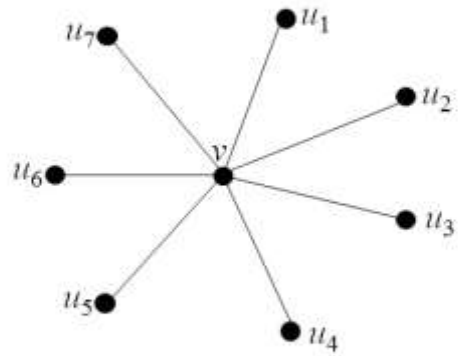
Gambar 2.2 Graf bipartit lengkap $K_{2,4}$

Definisi 2.4 [2] Graf bintang, dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf bipartit lengkap $K_{1,n}$.



Gambar 2.3 Graf bintang $S_7 \approx K_{1,7}$

Graf bintang dapat juga diilustrasikan dalam bentuk lain seperti pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Graf bipartit bintang $S_7 \approx K_{1,7}$

2.2 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Berikut ini diberikan kembali definisi dari pelabelan total tak teratur sisi.

Definisi 2.2 [1] Suatu pelabelan total $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur sisi jika setiap dua sisi yang berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di $E(G)$ memenuhi $w_f(x_1x_2) \neq w_f(y_1y_2)$ dimana $w_f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$.

Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total tak teratur sisi, dinotasikan dengan

$tes(G)$, disebut nilai total ketakteraturan sisi dari graf G [1].

Penelitian mengenai penentuan nilai $tes(G)$ dimulai oleh Bača, dkk pada makalah [1]. Pada makalah tersebut, diberikan batas bawah dan batas atas seperti dituliskan pada teorema berikut ini $tes(G)$.

Teorema 2.1 [1] Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|.$$

Pada makalah yang sama, Bača, dkk memberikan nilai $tes(G)$ jika G adalah graf lintasan atau graf lingkaran. Hasil penelitian tersebut diberikan pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.2 [1] Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 1$, maka

$$tes(P_n) = \left\lceil \frac{n + 2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.3 [1] Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 3$, maka

$$tes(C_n) = \left\lceil \frac{n + 2}{3} \right\rceil.$$

Penelitian mengenai nilai total ketakteraturan sisi untuk kelas graf tertentu juga telah dilakukan oleh Siddiqui, Ahmad, Nadeem, dan Bashir pada makalah [7]. Mereka memberikan nilai tes dari gabungan saling lepas dari beberapa graf matahari.

Teorema 2.4 [7] Misalkan $p, n \geq 3$ dua bilangan bulat. Maka nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas dari p graf matahari yang isomorf adalah $\left\lceil \frac{2(pn+1)}{3} \right\rceil$.

Hasil-hasil penelitian lain mengenai nilai total ketakteraturan sisi diberikan pada makalah [4]. Pada makalah tersebut, diberikan nilai total ketakteraturan sisi untuk graf hasil operasi korona lintasan dengan beberapa graf yang lain, diantaranya graf *friendship* dan graf gerigi.

2.3 Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Berikut ini diberikan kembali definisi dari pelabelan total tak teratur sisi.

Definisi 2.3 [1] Suatu pelabelan total $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ disebut pelabelan-k

ISSN 1979-8911

total tak teratur titik jika setiap dua titik yang berbeda u dan v di $V(G)$ memenuhi $w_f(u) \neq w_f(v)$ dimana $w_f(u) = w_f(u) = f(u) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$.

Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total tak teratur titik, dinotasikan dengan $tvs(G)$, disebut nilai total ketakteraturan titik dari graf G. [1]

Penelitian mengenai penentuan nilai $tvs(G)$ pertama kali dilakukan oleh Ba $\check{c}$a, dkk pada makalah [1]. Pada makalah tersebut, diberikan batas bawah dan batas $tvs(G)$ serta memberikan nilai $tvs(G)$, diantaranya untuk G graf lengkap. Hasil penelitian tersebut dituliskan pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.5 [1] Misalkan G adalah graf $-(p,q)$ dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ. Maka

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1.$$

Teorema 2.6 [1] Misalkan K_p adalah graf lengkap dengan p titik, maka

$$tvs(K_p) = 2.$$

Penelitian mengenai penentuan nilai tvs juga telah dilakukan oleh Nurdin, Baskoro, Salman, dan Gaos pada [5]. Pada makalah tersebut, Nurdin, dkk memberikan batas bawah nilai total ketakteraturan titik untuk graf pohon dengan memperhatikan derajat terbesarnya. Selain itu, diberikan nilai total ketakteraturan titik untuk graf pohon berderajat i, untuk $i = 1, 2,$ dan 3, serta untuk graf pohon yang tidak memiliki titik berderajat 2.

2.4 Pelabelan Total Tak Teratur Total

Untuk kenyamanan pembaca, berikut ini diberikan kembali definisi dari pelabelan total tak teratur total.

Definisi 2.4 [3] Pelabelan-k total tak teratur total pada G adalah pemetaan $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ yang memenuhi $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $w_f(u) = w_f(v) = f(v) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$

Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total tak teratur total, dinotasikan dengan $ts(G)$, disebut nilai total ketakteraturan total dari graf G. [3]

Pelabelan total tak teratur total diperkenalkan oleh Marzuki, Salman, and Miller pada [3]. Pada makalah tersebut, diberikan batas bawah dari $ts(G)$. Di samping itu, diberikan juga nilai total ketakteraturan total dari graf lintasan dan lingkaran. Hasil-hasil yang diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.7 [3] Untuk setiap graf G, berlaku

$$ts(G) \geq \{tes(G), tvs(G)\}$$

Teorema 2.8 [3] Misalkan $n \geq 3$ suatu bilangan bulat positif dan C_n adalah lingkaran dengan n sisi. Maka

$$ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

Teorema 2.9 [3] Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan P_n adalah lintasan dengan n titik. Maka

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil & \text{untuk } n = 2 \text{ atau } n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Hasil-hasil penelitian mengenai penentuan nilai total ketakteraturan total juga diberikan oleh Ramdani dan Salman pada makalahnya [6]. Pada makalah tersebut, diberikan nilai total ketakteraturan total pada beberapa graf hasil kali kartesius, yaitu $P_n \times P_2$, $C_n \times P_2$, $S_n \times P_2$, dan $(P_n + P_1) \times P_2$. Hasil penelitian tersebut diberikan pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 2.10 [6] Misalkan $n \geq 3$, maka

$$tes(P_n \times P_2) = n.$$

Teorema 2.11 [6] Misalkan $n \geq 3$, maka

$$tes(C_n \times P_2) = n + 1.$$

Teorema 2.12 [6] Misalkan $n \geq 3$, maka

$$tes(S_n \times P_2) = n + 1.$$

Teorema 2.13 [6] Misalkan $n \geq 3$, maka

$$tes((P_n + P_1) \times P_2) = \left\lceil \frac{5n+1}{3} \right\rceil.$$

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

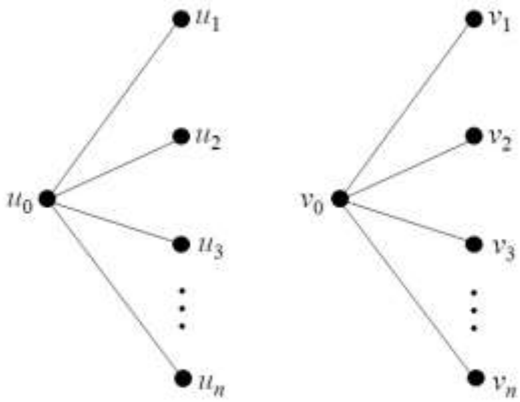
Dua *copy* dari graf bintang, dinotasikan dengan $2s_n$, adalah suatu graf dengan himpunan titik

$$V(2S_n) = \{u_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v_i \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

dan himpunan sisi

$$E(2S_n) = \{u_0 u_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \cup \{v_0 v_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Ilustrasi dari 2 *copy* graf bintang, yang dinotasuikan dengan $2S_n$, diberikan pada gambar di bawah ini.



$2S_n$

Gambar 3.1 Ilustrasi 2 *copy* graf bintang ($2S_n$)

Hasil dari penelitian ini diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.1 Misalkan $n \geq 2$, maka

$$ts(2S_n) = n + 1.$$

Bukti. Graf $2S_n$ memiliki $2n$ titik berderajat 1 dan 2 titik berderajat n. Maka bobot terkecil dari $2S_n$ sedikitnya 2 dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat 1 sedikitnya $2n+1$, sehingga label terbesar dari titik berderajat 1 adalah sedikitnya $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil = n+1$. Bobot terkecil dari suatu titik berderajat n sedikitnya $2n+2$ dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat n adalah $2n+2$, sehingga label terbesar dari suatu titik berderajat n adalah sedikitnya $\left\lceil \frac{2n+3}{n+1} \right\rceil = 3$. Dengan demikian,

$$tvs(2S_n) \geq \max\{n+1, 3\} = n+1. \quad (1)$$

Selain itu, banyaknya sisi dari $2S_n$ adalah $2n$, sehingga berdasarkan Teorema 2.1,

$$tes(2S_n) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \quad (2)$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.7,

$$ts(2S_n) \geq n+1. \quad (3)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $ts(2S_n) \leq n+1$.

- ***Kasus 1***: Untuk $n \in \{2,3,4\}$.

Definisikan suatu pelabelan total f pada $2S_n$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0; \\ \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0; \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \text{ untuk } i = 1; \\ i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0 v_i) = \begin{cases} 3 \text{ untuk } i = 1; \\ \left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil \text{ untuk } i = 2; \\ 4 \text{ untuk } i = 3; \\ 5 \text{ untuk } i = 4. \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan setiap sisi sebagai berikut :

1. Untuk $n = 2$.

Bobot pada setiap titik pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0) = 4;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(v_0) = 7;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 6.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0u_2) = 4;$$
$$w_f(v_0v_1) = 6;$$
$$w_f(v_0v_2) = 7.$$

Mudah dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_2$ berbeda.

2. Untuk $n = 3$.

Bobot pada setiap titik pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0) = 6;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(u_3) = 4;$$
$$w_f(v_0) = 12;$$
$$w_f(v_1) = 5;$$
$$w_f(v_2) = 7;$$
$$w_f(v_3) = 8.$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3;$$
$$w_f(u_0u_2) = 4;$$
$$w_f(u_0u_3) = 5;$$
$$w_f(v_0v_1) = 6;$$
$$w_f(v_0v_2) = 8;$$
$$w_f(v_0v_3) = 9.$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_3$ berbeda.

3. Untuk $n = 4$.

Bobot pada setiap titik pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0) = 9;$$
$$w_f(u_1) = 2;$$
$$w_f(u_2) = 3;$$
$$w_f(u_3) = 4;$$
$$w_f(u_4) = 5;$$
$$w_f(v_0) = 17;$$

ISSN 1979-8911

$w_f(v_1) = 6;$

$w_f(v_2) = 7;$

$w_f(v_3) = 8;$

$w_f(v_4) = 10.$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_4$ adalah

$w_f(u_0u_1) = 3;$

$w_f(u_0u_2) = 4;$

$w_f(u_0u_3) = 5;$

$w_f(u_0u_4) = 6;$

$w_f(v_0v_1) = 7;$

$w_f(v_0v_2) = 8;$

$w_f(v_0v_3) = 9$

$w_f(v_0v_4) = 11.$

Mudah dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot semua sisi pada $2S_4$ berbeda.

- ***Kasus 2*** : Untuk $n \geq 5$.

Defnisikan suatu pelabelan f pada $2S_n$, untuk $n \geq 5$, sebagai berikut:

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0; \\ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0; \\ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0v_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan bobot pada setiap sisi di $2S_n$ sebagai berikut:

1. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n+3}{4} \text{ untuk } n \text{ ganjil;} \\ \frac{n^2+4n+4}{4} \text{ untuk } n \text{ genap;} \end{cases}$$

$$w_f(u_i) = i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0) = \begin{cases} \frac{3n^2+4n+5}{4} \text{ untuk } n \text{ ganjil;} \\ \frac{3n^2+4n+4}{4} \text{ untuk } n \text{ genap;} \end{cases}$$

$$w_f(v_i) = n + i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

2. Bobot pada setiap titik di $2S_n$, untuk $n \geq 5$, adalah

$$w_f(u_0u_i) = i + 2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0v_i) = n + i + 2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

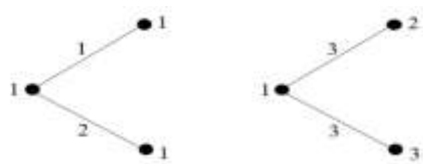
ISSN 1979-8911

Jelas bahwa tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada dua sisi yang memiliki bobot yang sama. Dengan demikian, f adalah suatu pelabelan-$(n+1)$ total tak teratur total pada $2S_n$, sehingga

$$ts(2S_n) = n + 1.$$

■

Sebagai ilustrasi, pada gambar di bawah ini diberikan suatu pelabelan-3 total tak teratur total untuk graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Kasus 1.

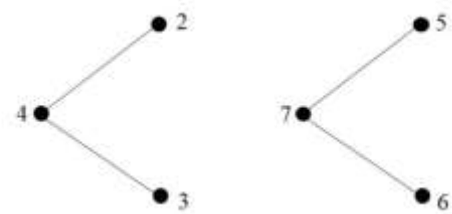


Gambar 3.2 Suatu pelabelan-3 total tak teratur total pada graf $2S_2$

Bobot semua sisi pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.2 diberikan pada Gambar 3.3.

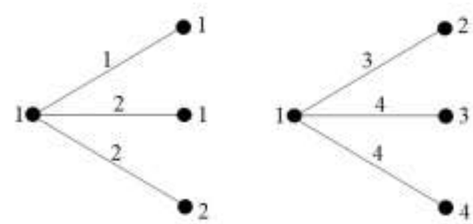
Gambar 3.3 Bobot semua sisi pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.2

Bobot semua titik pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.2 diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Bobot semua titik pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.2

Pada gambar-gambar di bawah ini diberikan suatu ilustrasi pelabelan-4 total tak teratur total untuk graf $2S_3$ serta ilustrasi bobot sisi maupun bobot titik berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Kasus 1.

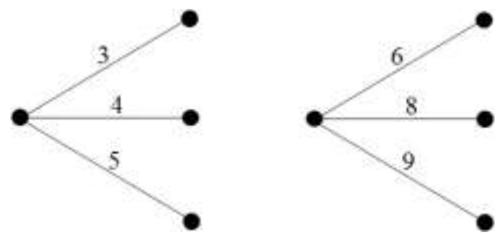


Gambar 3.5 Suatu pelabelan-4 total tak teratur total pada graf $2S_3$

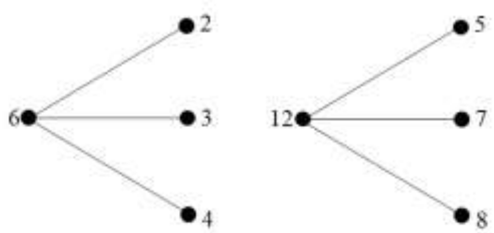
Bobot semua sisi dan bobot semua titik pada graf 2S3 berdasarkan pelabelan

 ISSN 1979-8911

3.5 berturut-turut diberikan pada Gambar 3.6 dan Gambr 3.7

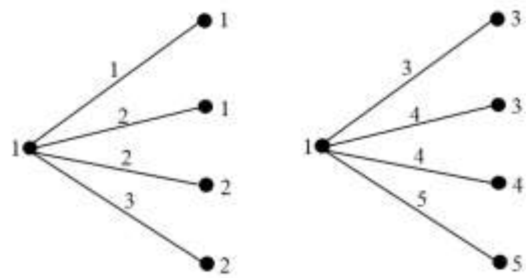


Gambar 3.6 Bobot semua sisi pada graf $2S_3$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.5

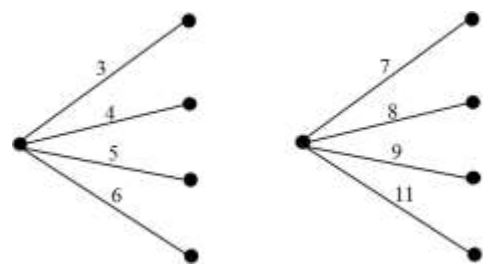


Gambar 3.7 Bobot semua titik pada graf 2 S_3 berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.5

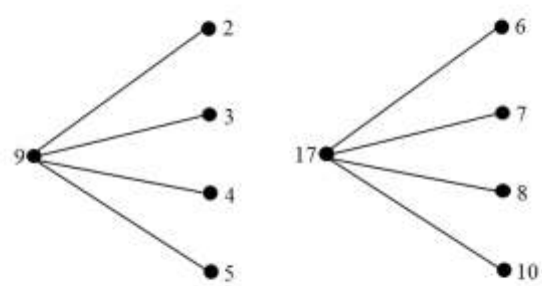
Pada gambar-gambar di bawah ini diberikan juga suatu ilustrasi pelabelan-5 total tak teratur total untuk graf $2S_4$ serta ilustrasi bobot sisi maupun bobot titiknya berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Kasus 1.



Gambar 3.8 Suatu pelabelan-5 total tak teratur total pada graf $2S_4$



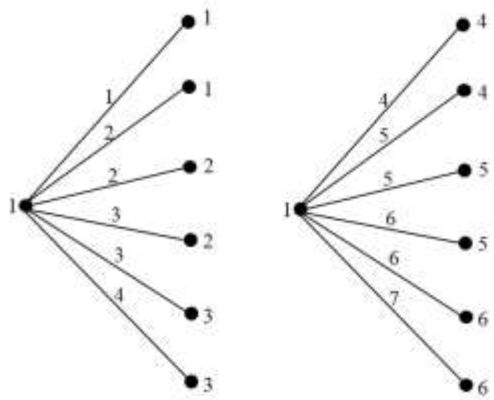
Gambar 3.9 Bobot semua sisi pada graf $2S_4$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.8



Gambar 3.10 Bobot semua titik pada graf $2S_4$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.8

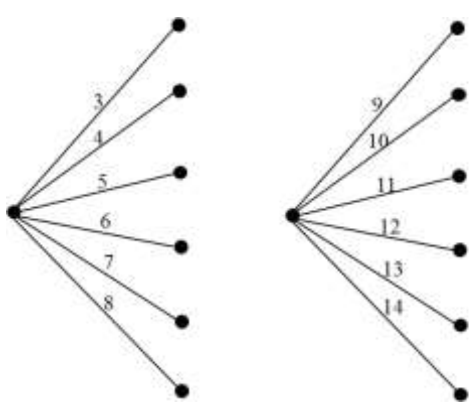
 ISSN 1979-8911

Pada gambar di bawah ini, diberikan ilustrasi pelabelan pada Kasus 2, yaitu untuk $n = 6$.

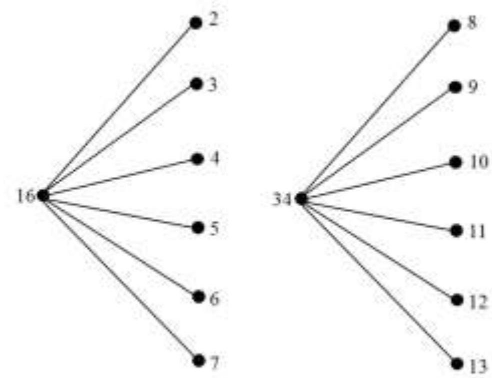


Gambar 3.11 Suatu pelabelan-7 total tak teratur total pada graf $2S_6$

Bobot semua sisi pada graf $2S_6$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.11 diberikan pada Gambar 3.12, sedangkan bobot semua titik pada graf $2S_6$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.11 diberikan pada Gambar 3.13.



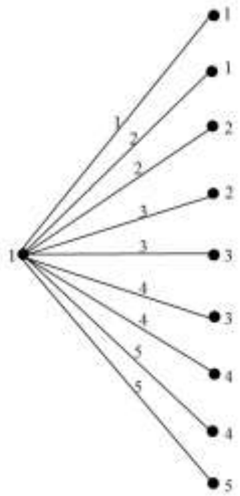
Gambar 3.12 Bobot semua titik pada graf $2S_6$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.11



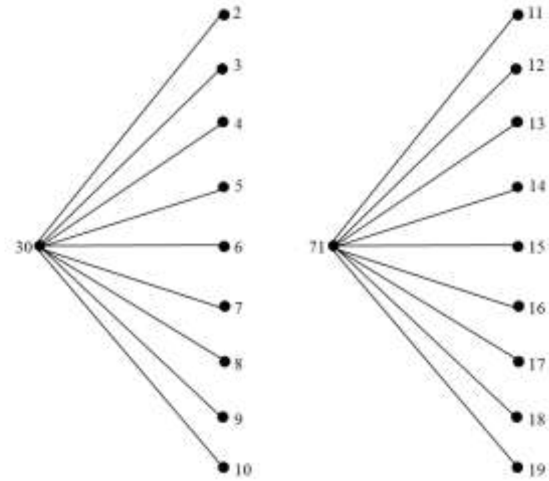
Gambar 3.13 Bobot semua titik pada graf $2S_6$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.11

Pada gambar-gambar di bawah ini kami juga memberikan suatu ilustrasi pelabelan-10 total tak teratur total untuk graf $2S_9$ serta ilustrasi bobot sisi maupun bobot titik berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Kasus 2.

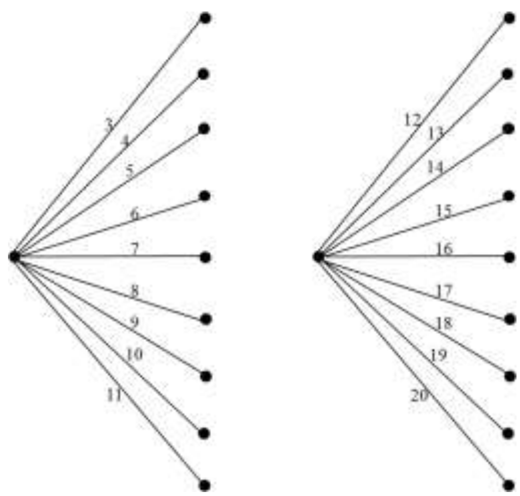
 ISSN 1979-8911



Gambar 3.14 Suatu pelabelan-10 total tak teratur total pada graf $2S_9$



Gambar 3.16 Bobot semua titik pada graf $2S_9$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.14



Gambar 3.15 Bobot semua titik pada graf $2S_9$berdasarkan pelabelan pada Gambar 3.14

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diberikan pada Bagian III, batas bawah $tvs(2S_n)$ diperoleh dengan argumentasi kombinatorik, yaitu dengan memperhatikan barisan derajat pada titik-titik di $2S_n$. Batas bawah yang diperoleh dengan argumentasi tersebut adalah $tvs(2S_n) \geq n+1$. Batas bawah $tvs(2S_n)$ diperoleh dengan memanfaatkan teorema yang diperoleh Bača, dkk pada makalah [1]. Batas bawah yang diperoleh adalah $tes(2S_n) \geq 3$. Selanjutya, kedua hasil tersebut dikombinasikan dengan memanfaatkan teorema yang diperoleh Marzuki, dkk pada makalah [3] untuk memperoleh batas bawah $ts(2S_n)$, sehingga diperoleh $ts(2S_n) \geq n+1$.

Batas atas $ts(2S_n)$ diperoleh dengan mengkonstruksi suatu pelabelan-$(n+1)$ total tak teratur total pada G. Berdasarkan pelabelan ini, diperoleh $ts(2S_n) \leq n+1$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa nilai total ketakteraturan total dari gabungan saling lepas dua graf bintang adalah $n+1$.

4.2 Saran

Pelabelan-k total tak teratur total merupakan topik yang baru dan banyak masalah terbuka yang belum dikaji. Pada penelitian-penelitian selanjutnya, dapat dikaji nilai total ketakteraturan total dari gabungan saling lepas m buah graf bintang yang tidak isomorf. Penulis menduga bahwa pada penentuan nilai total ketakteraturan total dari gabungan saling lepas m buah graf bintang yang tidak isomorf, akan dihadapi kesulitan dalam mengkonstruksi suatu pelabelan-k total tak teratur total disebabkan oleh ketakteraturan derajat titik dari graf tersebut.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bača, M., Jendroľ J., Miller, M., & Ryan, J. (2007): *On Irregular Total Labellings*, Discrete Math, Vol. 307, pp. 1378-1388.

[2] Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. (1976): *Graph Theory with Application*. London: The Macmillan Press Ltd.

[3] Marzuki, C.C., Salman, A.N.M., & Miller, M. *On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths*, diterima untuk dipublikasikan di Far East Journal of Mathematical Sciences.

[4] Nurdin, Salman, A.N.M., & Baskoro, E.T. (2008): *The Total Edge-Irregular Strengths of The Corona Product of Paths with Some Graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput., Vol 65, pp. 163-175.

[5] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M. , & Gaos, N.N. (2010): *On The Total Vertex Irregularity Strength of Trees*, Discrete Math. Vol. 310, pp. 3043-3048.

[6] Ramdani, R. & Salman, A.N.M. (2013): *On The Total Irregularity Strength of Some Cartesian Product Graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb.,Vol 10, No.2, pp. 199-209.

[7] Siddiqui, M.K., Ahmad, A.,

ISSN 1979-8911

Nadeem, M.F., & Bashir, Y. (2013): *Total Edge Irregularity Strength of The Disjoint Union of Sun Graphs*, International Journal of Mathematics and Soft Computing. Vol. 3, pp. 21-27.