

Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Buku

Gema Hista Medika^{1, a)}, Zebbil Billian Tomi^{2, b)}, dan Elis Ratna Wulan^{3, c)}

^{1,2}UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi

³UIN Sunan Gunung Djati Bandung

^{a)}email: gemahistamedika16@gmail.com

^{b)} email: zebbil.b.tomi@gmail.com

^{c)} email: elis_ratna_wulan@uinsgd.ac.id

Abstrak

Penelitian ini berfokus pada penentuan bilangan *rainbow connection* pada graf buku, terutama graf buku dengan bentuk segitiga, segi empat, serta segi lima. Graf buku segitiga, disimbolkan sebagai BT_n , dihasilkan dari penggabungan sisi pada graf lingkaran C_3 . Graf buku segi empat, disimbolkan sebagai BE_n , dihasilkan dari penggabungan sisi pada graf lingkaran C_4 . Sedangkan graf buku segi lima, disimbolkan sebagai BL_n , dihasilkan dari penggabungan sisi pada graf lingkaran C_5 . Bilangan *rainbow connection* pada sebuah graf terhubung G ditulis $rc(G)$, yang didefinisikan sebagai jumlah warna *minimum* yang dibutuhkan untuk menjadikan graf G menjadi terhubung secara *rainbow*. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif, melalui teknik studi pustaka dan analisis data non-statistik. Adapun hasil penelitian menyatakan bahwa bilangan *rainbow connection* pada Graf Buku Segitiga yaitu 1 jika $n = 1$, 2 jika $n = 2$, dan 3 untuk $n \geq 3$. Bilangan *rainbow connection* pada Graf Buku Segi Empat adalah 2 jika $n = 1$, 3 jika $n = 2$, dan 4 untuk $n \geq 3$. Sedangkan bilangan *rainbow connection* pada Graf Buku Segi Lima yaitu 3 jika $n = 1$, 4 jika $n = 2$, dan 6 untuk $n \geq 3$.

Kata kunci: Rainbow Connection, Graf Buku, Bilangan Rainbow Connection

Abstract

This research focuses on determining the number of rainbow connections in book graphs, especially book graphs with triangular, rectangular and pentagon shapes. The triangular book graph, symbolized as BT_n , results from joining the edges of the circle graph C_3 . The quadrilateral book graph, symbolized as BE_n , results from combining the edges of the circle graph C_4 . Meanwhile, the pentagonal book graph, symbolized as BL_n , is produced by combining the edges of the circle graph C_5 . The rainbow connection number in a connected graph G is written $rc(G)$, which is defined as the minimum number of colors needed to make a graph G rainbow connected. This research is qualitative descriptive research, using literature study techniques and non-statistical data analysis. The research results state that the rainbow connection number in the Triangle Book Graph is 1 if $n = 1$, 2 if $n = 2$, and 3 for $n \geq 3$. The rainbow connection number in the Quadrilateral Book Graph is 2 if $n = 1$, 3 if $n = 2$, and 4 for $n \geq 3$. Meanwhile, the rainbow connection number in the Pentagon Book Graph is 3 if $n = 1$, 4 if $n = 2$, and 6 for $n \geq 3$.

Keywords: Rainbow Connection, Book Graph, Rainbow Connection Number

Pendahuluan

Aplikasi dari teori graf sangat luas, baik pada kehidupan sehari-hari ataupun pada berbagai disiplin ilmu lainnya, termasuk teknik, sains, ilmu komputer, ilmu sosial dan bisnis [1]. Salah satu tema menarik dalam teori graf yaitu konsep bilangan *rainbow connection*. Chartrand dan rekan-rekannya memperkenalkan konsep *rainbow connection* dalam graf pada tahun 2006 [2]. Dalam konteks ini, misalkan G yaitu suatu graf terhubung yang tidak trivial, di mana pewarnaan sisi didefinisikan sebagai pemetaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, dengan k merupakan bilangan bulat positif, mengakibatkan dua sisi yang bertetangga di G diperbolehkan mempunyai warna yang sama. Sebuah jalur $u - v$, P , di G disebut sebagai jalur *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi di P yang mempunyai warna yang sama. Graf G disebut sebagai *rainbow connected* (terhubung *rainbow*) jika setiap dua titik yang berbeda di G dapat dihubungkan pada jalur *rainbow*. Pewarnaan sisi yang membuat G menjadi terhubung *rainbow* disebut sebagai pewarnaan *rainbow*. Dengan kata lain, jika G suatu terhubung *rainbow*, maka G juga pasti terhubung. Begitu juga, setiap graf terhubung mempunyai pewarnaan sisi yang sederhana, mengakibatkan graf terhubung *rainbow* mempunyai pewarnaan sisi yang berbeda-beda. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G , yang ditulis sebagai $rc(G)$, didefinisikan sebagai jumlah warna *minimal* yang dibutuhkan untuk menjadikan G menjadi terhubung *rainbow* [3].

Konsep *Rainbow Connection*, yang diadaptasi untuk perlindungan distribusi informasi rahasia antara pemerintah dan agen, menjelaskan bagaimana mengatur lintasan informasi yang aman antara dua agen tanpa ada sandi yang berulang. Dalam situasi ini, pemerintah maupun agen tidak dapat saling memeriksa informasi yang berkaitan dengan keamanan nasional, akibatnya setiap informasi yang disampaikan kepada agen harus dienkripsi. Untuk mencapai tujuan ini, perlu ditetapkan sejumlah sandi yang berbeda untuk setiap lintasan informasi antara dua agen. Jumlah sandi yang dibutuhkan harus memastikan bahwa tidak ada lintasan yang menggunakan sandi yang sama, sehingga menjaga keamanan komunikasi. Prinsip ini menciptakan konsep bilangan *Rainbow Connection*, yang menggambarkan jumlah sandi *minimum* yang dibutuhkan untuk memastikan ada setidaknya satu lintasan aman antara setiap dua agen yang terlibat. Dengan demikian, *Rainbow Connection* dapat diaplikasikan sebagai kerangka konseptual untuk mengatur pengiriman informasi rahasia antara pemerintah dan agen tanpa risiko pemaparan informasi kepada pihak yang tidak berwenang [4].

Penelitian terkait dengan Bilangan *rainbow connection* ini sudah banyak dilakukan, seperti yang dilakukan oleh Syafrizal Sy dkk. (2013) yang meneliti tentang *Rainbow connection* pada graf matahari dan graf kipas [5]. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Medika (2013) dengan judul *Rainbow connection* pada beberapa graf [3], *Rainbow Connection* Hasil Operasi Graf [6], Bilangan terhubung Pelangi graf berlian [7], Bilangan *rainbow connection* untuk beberapa graf thorn [8], Bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir [9], Pelabelan Fibonacci Prima ke- k pada Graf H dan Graf Ulat H_n [10], Pelabelan Super Graceful pada Graf Caterpillar [11], Bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf Jahangir $J_{2,m}$ [12], Bilangan terhubung pelangi graf bunga (W_m, K_n) dan graf lemon (Le_n) [13], Bilangan terhubung Pelangi pada graf salju (S_{nm}) [14]. Sementara Lakisa dkk. (2022) meneliti tentang Bilangan terhubung Pelangi pada graf *ferris wheel* (FW_n) [15], Bilangan Terhubung Pelangi Kuat Pada Graf Gurita, Planter Dan *Ferris Wheel* [16], Bilangan *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* Graf Jahangir $J_{2,m}$ Untuk $2 \leq m \leq 8$ [17].

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk meneliti tentang Bilangan *rainbow connection* pada graf buku. Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segitiga; Bagaimana menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segi empat; Bagaimana menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segi lima. Sesuai dengan rumusan masalah dan latar

belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini yaitu: Menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segitiga; Menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segi empat; Menentukan Bilangan *rainbow connection* pada graf buku segi lima.

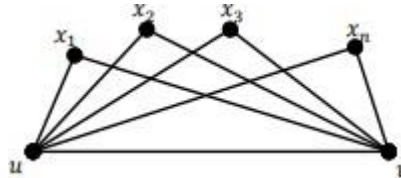
Metode

Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Buku

Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang dibahas pada artikel ini:

a. Graf Buku Segitiga

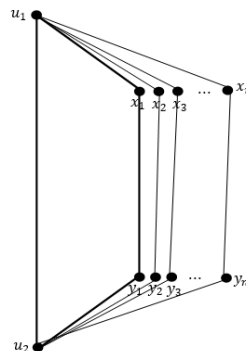
Graf buku segitiga yang dinotasikan dengan BT_n merupakan hasil operasi amalgamasi sisi pada graf lingkaran C_3 , seperti terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Buku Segitiga

b. Graf Buku Segi Empat

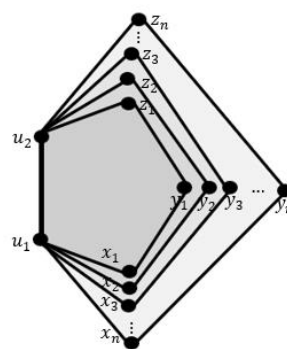
Graf buku segi empat yang dinotasikan dengan BE_n merupakan hasil operasi amalgamasi sisi pada graf lingkaran C_4 , seperti terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Buku Segi Empat

c. Graf Buku Segi Lima

Graf buku segi lima yang dinotasikan dengan BL_n merupakan hasil operasi amalgamasi sisi pada graf lingkaran C_5 , seperti terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Graf Buku Segi Lima

Subjek penelitian ini mencakup pemeriksaan terhadap konsep bilangan *rainbow connection* dan graf buku. Sumber data yang digunakan pada penelitian ini: sumber primer dan sumber sekunder. Metode yang diaplikasikan pada penelitian ini yaitu studi pustaka, yang melibatkan proses pencarian, pembacaan, pemahaman, dan analisis terhadap berbagai literatur, hasil penelitian, atau studi yang relevan dengan topik penelitian[18].

Prosedur yang diambil dalam menguraikan penelitian ini yaitu sebagai berikut: (1) Peneliti akan menjelaskan konsep dasar, definisi, serta notasi yang terkait dengan teori graf, serta berbagai jenis graf, termasuk graf buku. Fokus khusus pada penelitian ini adalah pada graf buku segitiga, segi empat, dan segi lima. (2) Definisi umum mengenai bilangan *rainbow connection* juga akan dipaparkan oleh peneliti. (3) Selanjutnya, peneliti akan mendiskusikan tentang bilangan *rainbow connection* pada graf buku, dengan penekanan pada graf buku segitiga, segi empat dan segi lima.

Teknik analisis data yang dipakai adalah non-statistik, di mana data dipaparkan, ditabulasikan, dan kemudian ditafsirkan atau disimpulkan. Tahapan analisis data dalam penelitian ini mencakup: (1) Menetapkan graf buku segitiga, segi empat, dan segi lima; (2) Mengimplementasikan pewarnaan sisi; (3) Mengidentifikasi *rainbow path*, *rainbow connected*, dan *rainbow coloring*; (4) Menetapkan nilai $rc(G)$; (5) Menyusun rangkuman analisis nilai $rc(G)$; (6) Mendokumentasikan hasilnya. Rancangan penelitian ini dapat diilustrasikan dalam Gambar 4.

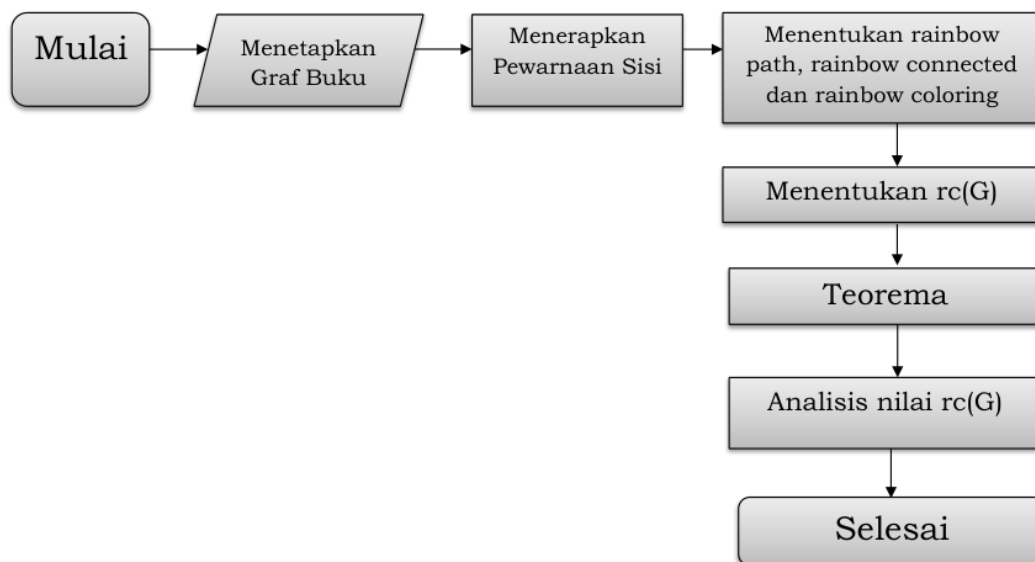
Hasil dan Diskusi

Teorema 1. Untuk $n \geq 1$, bilangan *rainbow connection* dari graf buku segitiga BT_n yaitu

$$rc(BT_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 1 \\ 2, & \text{untuk } n = 2 \\ 3, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

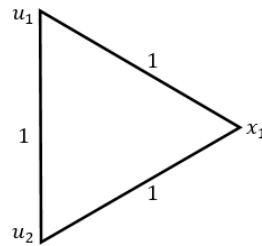
Bukti

Graf buku segitiga merupakan graf yang merupakan gabungan himpunan titik dan sisi dimana himpunan titiknya adalah $V(BT_n) = \{u_1, u_2, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(BT_n) = \{u_1u_2\} \cup \{u_1x_i \cup u_2x_i; 1 \leq i \leq n\}$. Dimana total titik pada graf BT_n yaitu $p = |V| = n + 2$ dan total sisi $q = |E| = 2n + 1$.



Gambar 4. Flowchart Penelitian

Berikut diberikan ilustrasi dari Teorema 1 untuk graf buku segitiga dengan $n=1$, dapat dilihat pada Gambar 5.

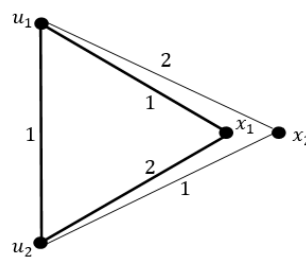


Gambar 5. $rc(BT_1) = 1$

Dimana sisi u_1u_2 diberi warna 1; sisi u_1x_1 diberi warna 1; sisi u_2x_1 diberi warna 1. Jadi $rc(BT_1) = 1$

Kasus 1. Untuk $n = 1$ dimana $BT_1 = K_3$, K_3 merupakan graf lengkap, yaitu graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga. Berdasarkan [2], $rc(Kn) = 1$.

Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 1 untuk graf buku segitiga dengan $n = 2$, seperti terlihat pada Gambar 6.



Gambar 6. $rc(BT_2) = 2$

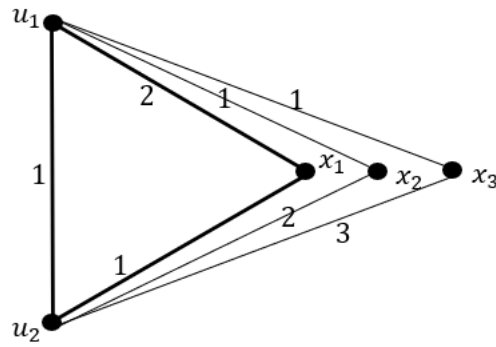
Pada Tabel 1 terlihat bahwa $rc(BT_2) = 2$.

Tabel 1. Rainbow path pada BT_2

Lintasan (path)	Rainbow path
u_1u_2	1
u_1x_1	1
u_1x_2	2
u_2x_1	2
u_2x_2	1
x_1x_2	1,2

Kasus 2. Untuk $n = 2$ dimana pada Tabel 1 terlihat diameter dari BT_2 adalah 2. Diameter adalah maksimum jarak antar titik di BT_2 . Jadi, bilangan rainbow connection dari BT_2 adalah 2.

Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 1 untuk graf buku segitiga dengan $n=3$, seperti terlihat pada Gambar 7.



Gambar 7 $rc(BT_3) = 3$

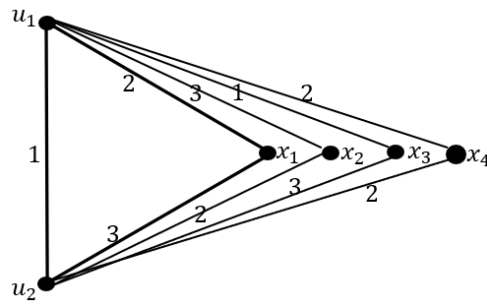
Pada Tabel 2 terlihat bahwa $rc(BT_3) = 3$.

Tabel 2. *Rainbow path* pada BT_3

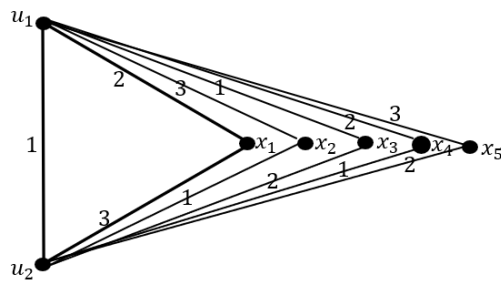
Lintasan (<i>path</i>)	<i>Rainbow path</i>
u_1u_2	1
u_1x_1	2
u_1x_2	1
u_1x_3	1
u_2x_1	1
u_2x_2	2
u_2x_3	3
x_1x_2	2,1
x_1x_3	2,1
x_2x_3	2,3

Kasus 3. Untuk $n = 3$. dimana pada Tabel 2 terlihat *diameter* dari BT_3 adalah 2. Namun, jika diberikan hanya 2 warna saja, ada lintasan yang bukan rainbow, sehingga agar BT_3 memuat *rainbow path* ditambah 1 warna. Jadi, bilangan *rainbow connection* dari BT_3 adalah 3.

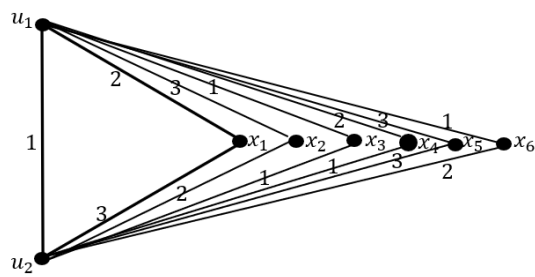
Begitu juga untuk $n > 3$, terlihat *diameter* dari BT_4, BT_5, BT_6, dst adalah 2. Namun, jika diberikan hanya 2 warna saja, ada lintasan yang bukan rainbow, sehingga agar BT_4, BT_5, BT_6, dst memuat *rainbow path* ditambah 1 warna. Adapun ilustrasi dari Teorema 1 untuk graf buku segitiga dengan $n = 4, 5, 6, \dots, 8$, seperti terlihat pada Gambar 8 hingga Gambar 13.



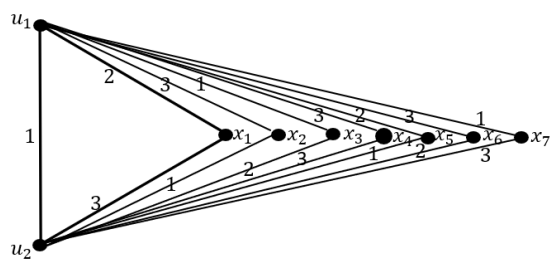
Gambar 8 $rc(BT_4) = 3$



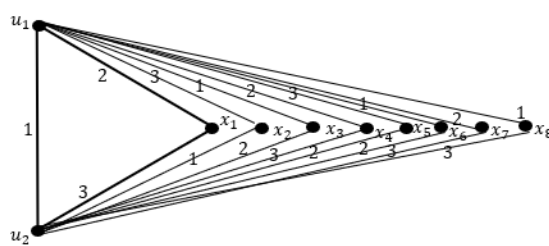
Gambar 9 $rc(BT_5) = 3$



Gambar 11 $rc(BT_6) = 3$



Gambar 12 $rc(BT_7) = 3$



Gambar 13 $rc(BT_8) = 3$

Jadi, bilangan rainbow connection pada graf segitiga adalah

$$rc(BT_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 1 \\ 2, & \text{untuk } n = 2 \\ 3, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

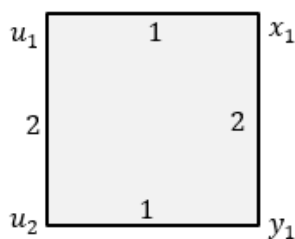
Teorema 2 [6]. Bilangan *rainbow connection* dari graf buku segi empat BE_n untuk $n \geq 1$ adalah

$$rc(BE_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 1 \\ 3, & \text{untuk } n = 2 \\ 4, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti.

Graf buku segi empat merupakan graf yang meliputi gabungan himpunan titik dan sisi dimana himpunan titiknya adalah $V(BE_n) = \{u_1, u_2, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya adalah $E(BE_n) = \{u_1u_2\} \cup \{u_1x_i \cup u_2y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\}$. Dimana total titik pada graf BE_n yaitu $p = |V| = 2n + 2$ dan total sisi $q = |E| = 3n + 1$.

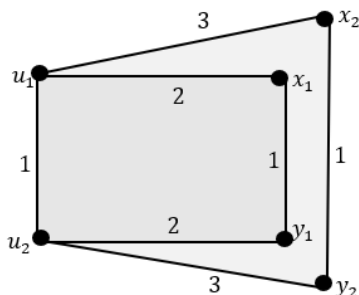
Berikut diberikan pewarnaan sisi pada graf buku segi empat dengan $n=1$, seperti terlihat pada Gambar 14.



Gambar 14 $rc(BE_1) = 2$

Kasus 1. Untuk $n = 1$ dimana $BE_1 = C_4$, C_4 merupakan graf lingkaran, yaitu graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Berdasarkan [2], $rc(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ sehingga $rc(C_4) = \lceil 4/2 \rceil = 2$. Dimana sisi pada lintasan u_1u_2 mempunyai warna 2; lintasan u_1x_1 mempunyai warna 1; lintasan u_1y_1 mempunyai warna 1,2; lintasan u_2x_1 mempunyai warna 1,2; lintasan u_2y_1 mempunyai warna 1 dan lintasan x_1y_1 diberi warna 2. Jadi $rc(BE_1) = 2$.

Selanjutnya diberikan ilustrasi pewarnaan sisi pada graf buku segi empat dengan $n=2$, seperti terlihat pada Gambar 15.



Gambar 15 $rc(BE_2) = 3$

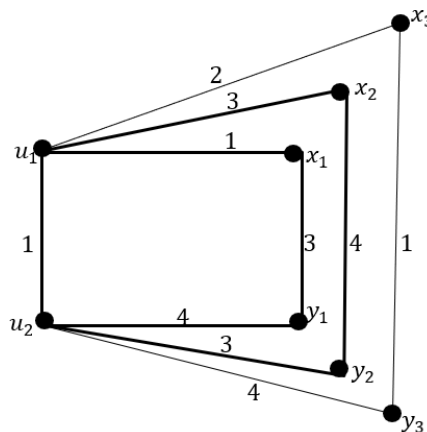
Pada Tabel 3 terlihat bahwa setiap lintasan pada graf BE_2 merupakan lintasan *rainbow*

Tabel 3 Rainbow path pada BE_2

Lintasan (<i>path</i>)	Rainbow path	Lintasan (<i>path</i>)	Rainbow path
u_1u_2	1	u_2y_2	3
u_1x_1	2	x_1x_2	2,3
u_1x_2	3	x_1y_1	1
u_1y_1	1,2	x_1y_2	1,2,3
u_1y_2	1,3	x_2y_1	3,2,1
u_2x_1	1,2	x_2y_2	1
u_2x_2	1,3	y_1y_2	2,3
u_2y_1	2		

Kasus 2. Untuk $n = 2$ dimana pada Tabel 2 terlihat diameter dari BE_2 adalah 3. Diameter adalah maksimum jarak antar titik di BE_2 . Jadi, bilangan *rainbow connection* dari BE_2 adalah 3.

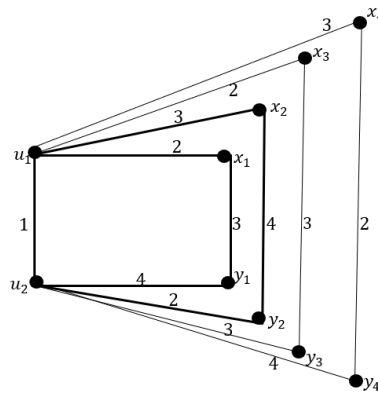
Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 2 untuk graf buku segi empat dengan $n = 3$ seperti terlihat pada Gambar 16.



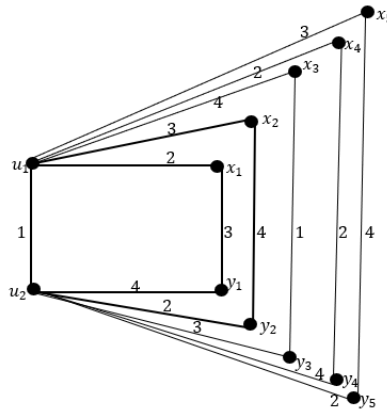
Gambar 16 $rc(BE_3) = 4$

Kasus 3. Untuk $n = 3$. terlihat *diameter* dari BE_3 adalah 3. Namun, jika diberikan hanya 3 warna saja, ada lintasan yang bukan rainbow, sehingga agar BE_3 memuat *rainbow path* ditambah 1 warna. Jadi, bilangan *rainbow connection* dari BE_3 adalah 4.

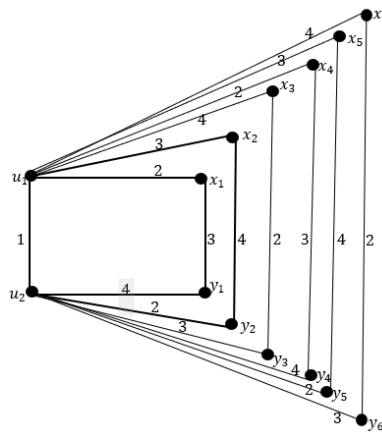
Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 2 untuk graf buku segi empat dengan $n = 4,5,6$ seperti terlihat pada Gambar 17, Gambar 18, dan Gambar 19..



Gambar 17. $rc(BE_4) = 4$



Gambar 18. $rc(BE_5) = 4$



Gambar 19. $rc(BE_6) = 4$

Begitu juga untuk $n \geq 3$. terlihat *diameter* dari $BE_4 = BE_5 = dst$ adalah 4. Jadi, bilangan *rainbow connection* dari $BE_4 = BE_5 = dst$ adalah 4. Jadi, bilangan *rainbow connection* pada graf segi empat adalah

$$rc(BE_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 1 \\ 3, & \text{untuk } n = 2 \\ 4, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

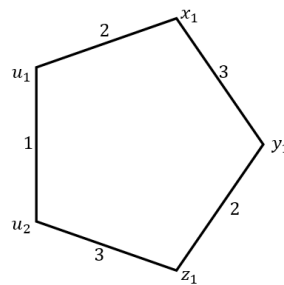
Teorema 3. Bilangan *rainbow connection* dari buku segi lima BL_n untuk $n \geq 1$ adalah

$$rc(BL_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 1 \\ 4, & \text{untuk } n = 2 \\ 6, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti.

Graf buku segi lima merupakan graf yang meliputi gabungan himpunan titik dan sisi dimana himpunan titiknya adalah $V(BL_n) = \{u_1, u_2, x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya $E(BL_n) = \{u_1u_2\} \cup \{u_1x_i \cup u_2z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iz_i; 1 \leq i \leq n\}$. Dimana total titik pada graf BL_n yaitu $p = |V| = 3n + 2$ dan total sisi $q = |E| = 4n + 1$.

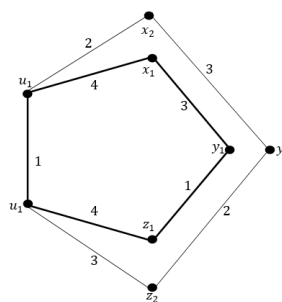
Berikut diberikan ilustrasi pewarnaan sisi untuk graf buku segi lima dengan $n=1$, seperti terlihat pada Gambar 20.



Gambar 20. $rc(BL_1) = 3$

Kasus 1. Untuk $n = 1$ dimana $BL_1 = C_5$, C_4 merupakan graf lingkaran, yaitu graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Berdasarkan [2], $rc(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga $rc(C_5) = \lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$. Dimana lintasan u_1u_2 mempunyai warna 1; lintasan u_1x_1 mempunyai warna 2; lintasan u_1y_1 mempunyai warna 2,3; lintasan u_1z_1 mempunyai warna 1,3; lintasan u_2x_1 mempunyai warna 1,2; lintasan u_2y_1 mempunyai warna 3,2; lintasan u_2z_1 mempunyai warna 3; lintasan x_1y_1 mempunyai warna 3; lintasan x_1z_1 mempunyai warna 3,2 dan lintasan y_1z_1 mempunyai warna 2. Jadi $rc(BL_1) = 3$.

Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 3 untuk graf buku segi lima dengan $n=2$, seperti terlihat pada Gambar 21.



Gambar 21. $rc(BL_2) = 4$

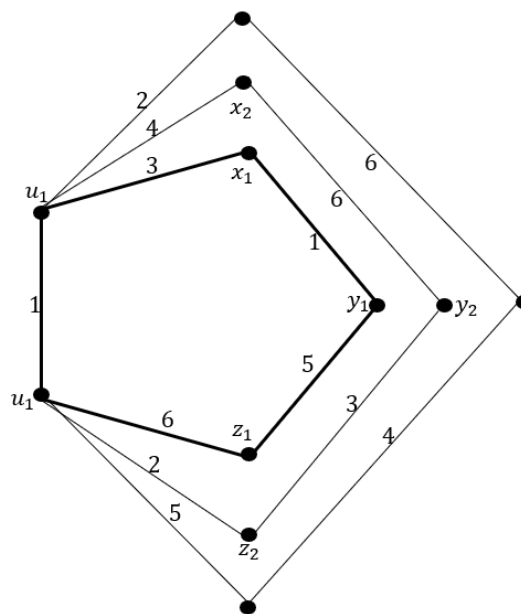
Pada Tabel 4 terlihat bahwa $rc(BL_2) = 4$.

Tabel 4. Rainbow path pada BL_2

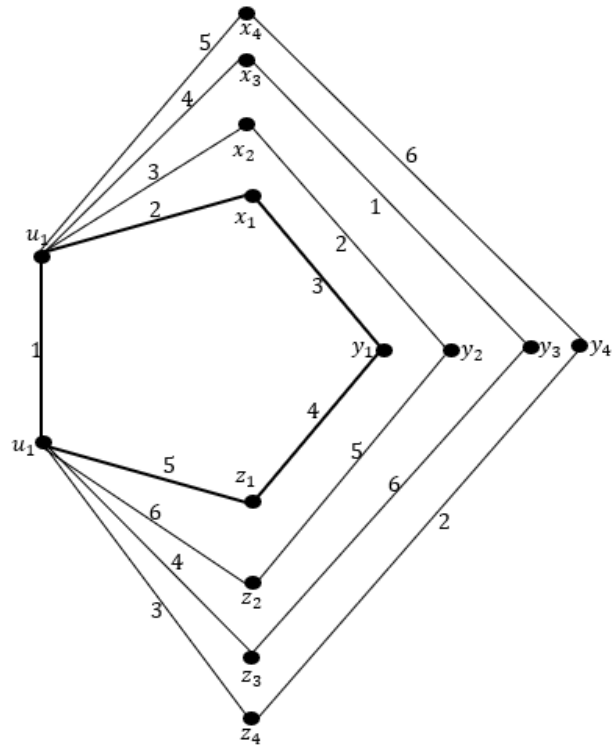
Lintasan (<i>path</i>)	<i>Rainbow path</i>	Lintasan (<i>path</i>)	<i>Rainbow path</i>
u_1u_2	1	x_1y_1	3
u_1x_1	4	x_1y_2	4,2,3
u_1x_2	2	x_1z_1	3,1
u_1y_1	4,3	x_1z_2	4,1,3
u_1y_2	2,3	x_2y_1	2,4,3
u_1z_1	1,4	x_2y_2	3
u_1z_2	1,3	x_2z_1	2,1,4
u_2x_1	1,4	x_2z_2	2,1,3
u_2x_2	1,2	y_1y_2	1,4,3,2
u_2y_1	4,1	y_1z_1	1
u_2y_2	3,2	y_1z_2	1,4,3
u_2z_1	4	y_2z_1	2,3,4
u_2z_2	3	y_2z_2	2
x_1x_2	4,2	z_1z_2	4,3

Kasus 2. Untuk $n = 2$ di mana pada Tabel 4 terlihat diameter dari BL_2 adalah 4. Jadi, bilangan *rainbow connection* dari BL_2 adalah 4.

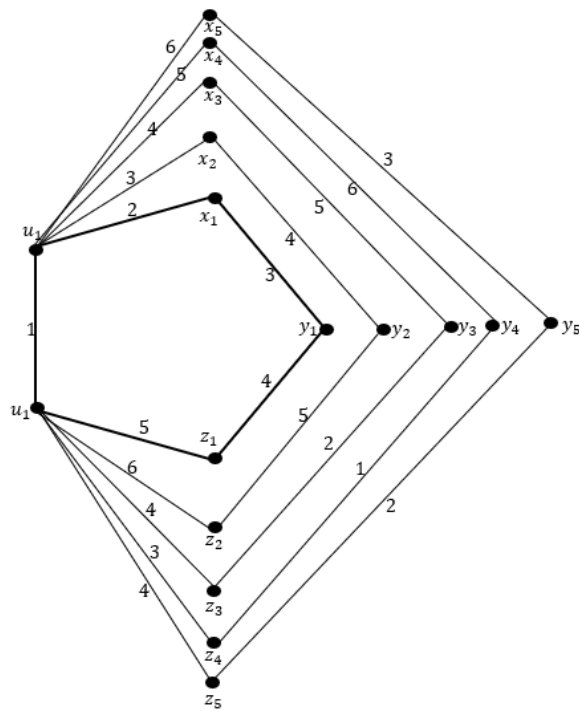
Selanjutnya diberikan ilustrasi dari Teorema 3 untuk graf buku segi lima dengan $n=3,4,5,6$ seperti terlihat pada Gambar 22 hingga 25.



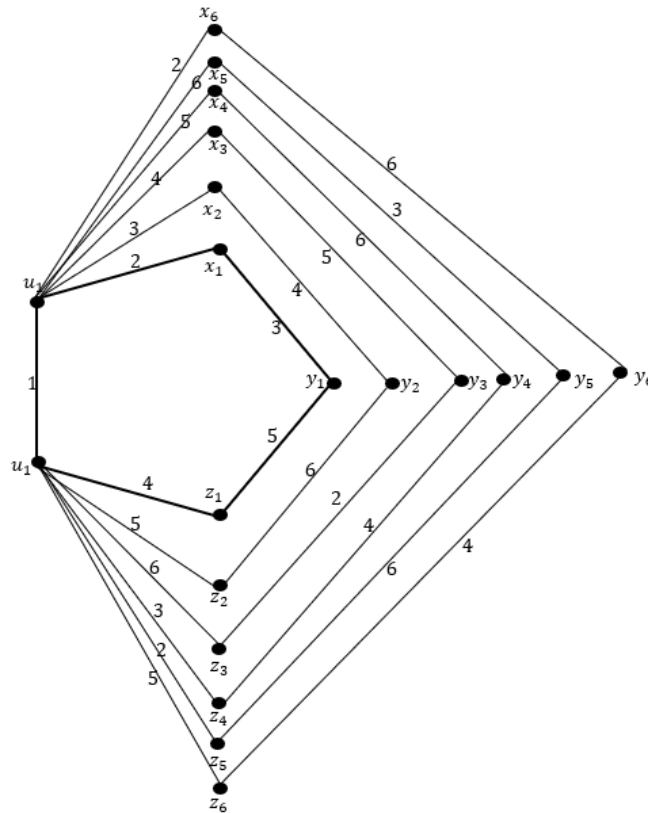
Gambar 22. $rc(BL_3) = 6$



Gambar 23. $rc(BL_4) = 6$



Gambar 24. $rc(BL_5) = 6$



Gambar 25. $rc(BL_6) = 6$

Kasus 3. Untuk $n \geq 3$ dimana terlihat diameter dari $BL_3 = BL_4 = dst$ adalah 5. Namun, jika diberikan hanya 5 warna saja, ada lintasan yang bukan rainbow, sehingga agar $BL_3 = BL_4 = dst$ memuat *rainbow path* ditambah 1 warna. Jadi, bilangan *rainbow connection* dari $BL_3 = BL_4 = dst$ adalah 6. Jadi, bilangan *rainbow connection* pada graf segi lima adalah

$$rc(BL_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 1 \\ 4, & \text{untuk } n = 2 \\ 6, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa bilangan *rainbow connection* pada Graf Buku Segitiga yaitu bernilai 1 jika $n = 1$ (graf buku segitiga sebanyak 1 lembar). Artinya, satu warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda. bernilai 2 jika $n = 2$ (graf buku segitiga sebanyak 2 lembar), Artinya, dua warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda. dan bernilai 3 untuk $n \geq 3$ (graf buku segitiga sebanyak 3 lembar atau lebih), artinya, tiga warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda

Bilangan *rainbow connection* pada Graf Buku Segi Empat yaitu bernilai 2 jika $n = 1$ (graf buku segi empat sebanyak 1 lembar) artinya, dua warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda; bernilai 3 jika $n = 2$ (graf buku segi

empat sebanyak 2 lembar) artinya, tiga warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda dan bernilai 4 untuk $n \geq 3$ (graf buku segi empat sebanyak 3 lembar atau lebih) artinya, empat warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda.

Bilangan rainbow connection pada Graf Buku Segi Lima yaitu bernilai 3 jika $n = 1$ (graf buku segi lima sebanyak 1 lembar) artinya, tiga warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda. bernilai 4 jika $n = 2$ (graf buku segi lima sebanyak 2 lembar), artinya, empat warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda dan bernilai 6 untuk $n \geq 3$ (graf buku segi lima sebanyak 3 lembar atau lebih) artinya, enam warna sudah cukup untuk memastikan setiap pasangan titik dihubungkan oleh jalur dengan tepi-tepi warna berbeda.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terimakasih disampaikan kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian penelitian yang berjudul "Bilangan Rainbow Connection pada Graf Buku", khususnya Litapdimas Kemenag dan UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi yang telah memberikan hibah penelitian kepada peneliti tahun 2023, sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik dan dapat dituangkan dalam bentuk artikel. Semoga artikel ini bisa dijadikan sebagai referensi pada penelitian-penelitian selanjutnya.

Referensi

- [1] I. K. Budayasa, *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press, 2007.
- [2] Chartrand, G. I Johns, K. A. McKeon, and P.Zhang, "Rainbow Connection in Graphs," *Math Bohemica*, 2008.
- [3] G. H. Medika, "Rainbow Connection Pada Beberapa Graf," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 2, no. 2, p. 17, 2013, doi: 10.25077/jmu.2.2.17-25.2013.
- [4] F. Anggalia, "Penentuan Rainbow Connection Number Pada Graf Buku Segiempat, Graf Kipas, Dan Graf Tribun," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 6, no. 1, p. 153, 2017, doi: 10.25077/jmu.6.1.153-160.2017.
- [5] S. Sy, G. H. Medika, and L. Yulianti, "The rainbow connection of fan and sun," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 7, no. 61–64, pp. 3155–3160, 2013, doi: 10.12988/ams.2013.13275.
- [6] M. Mahmudah and Dafik, "Rainbow Connection Hasil Operasi Graf," pp. 174–183, 2014.
- [7] M. A. Shulhany and A. N. M. Salman, "Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian," *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS*, no. 1, pp. 916–923, 2015.
- [8] M. Muchlian, "Bilangan Rainbow Connection Untuk Beberapa Graf Thorn," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 5, no. 3, p. 65, 2016, doi: 10.25077/jmu.5.3.65-76.2016.
- [9] B. B. Sari, "Bilangan Rainbow Connection Graf Garis," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 6, no. 4, pp. 17–21, 2017.
- [10] N. Y. Sari, E. Noviani, and F. Fran, "Pelabelan Fibonacci Prima Ke-k Pada Graf H dan Graf Ulat H_n ," *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 8, no. 2, pp. 89–98, 2023, doi: 10.15575/kubik.v8i2.29290.
- [11] N. Nur Arafah, R. Ramdani, and A. Fatchul Huda, "Pelabelan Super Graceful pada Graf Caterpillar," *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 1, no. 1, pp. 38–48, 2015, doi: 10.15575/kubik.v1i1.322.

- [12] D. N. Asmara, "Bilangan Rainbow Connection Dan Strong Rainbow Connection Pada Graf Jahangir," *Jurnal Matematika Unand*, vol. VII, no. 1, pp. 52–58, 2018.
- [13] I. S. Kumala, "Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf lemon," *Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 39–48, 2019.
- [14] C. A. P. Noor, L. Yahya, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, "BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF SALJU ($S_{n,m}$)," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 4, no. 1, pp. 29–44, 2021, doi: 10.14710/jfma.v4i1.9035.
- [15] N. Lakisa, N. Nurwan, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, "Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Ferris Wheel (Fw_n)," *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 7, no. 1, pp. 66–80, 2022, doi: 10.26594/jmpm.v7i1.2337.
- [16] F. GUSLIANA, "Bilangan Terhubung Pelangi Kuat Pada Graf Gurita, Planter Dan Ferris Wheel.," UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA, 2023.
- [17] M. RANDA, D. WELYANTI, and L. YULIANTI, "BILANGAN RAINBOW CONNECTION DAN STRONG RAINBOW CONNECTION GRAF JAHANGIR $J_{2,m}$ UNTUK $2 \leq m \leq 8$," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 12, no. 1, p. 55, 2023, doi: 10.25077/jmua.12.1.55-64.2023.
- [18] Sugiyono, *Metode penelitian kualitatif : (untuk penelitian yang bersifat : eksploratif, enterpretif, interaktif dan konstruktif)*. Bandung: Alfabeta, 2020.