

# Simulasi Model Mangsa Pemangsa Di Wilayah yang Dilindungi untuk Kasus Pemangsa Tergantung Sebagian pada Mangsa

Ipah Junaedi<sup>1, a)</sup>, Diny Zulkarnaen<sup>2, b)</sup>, dan Siti Julaeha<sup>3, c)</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati  
Jl. A H Nasution No. 105 Bandung

<sup>a)</sup> ipah.junaedi@gmail.com

<sup>b)</sup> dinyzul@gmail.com

<sup>c)</sup> siti.julaeha0609@yahoo.com

## Abstrak

Suatu model matematika diterapkan pada suatu kasus pemangsa yang tergantung sebagian pada mangsa di wilayah yang dilindungi. Adapun setelah dibentuk model mangsa pemangsa pada kasus ini maka diperoleh empat titik tetap, masing-masing titik tetap tersebut memiliki jenis kestabilan yang berbeda, yakni tidak stabil, *saddle*, dan stabil asimtotik. Selanjutnya model mangsa pemangsa disimulasikan untuk mengetahui dinamika pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa. Simulasi tersebut menggunakan metode Adam-Bashfort-Moulton dengan prosedur pendahuluan pencarian nilai awal menggunakan metode Euler.

Kata kunci: Model Mangsa Pemangsa, titik tetap, jenis kestabilan, metode Adam-Bashfort-Moulton.

## Pendahuluan

Ekologi merupakan cabang ilmu yang mempelajari lingkungan alam dimana di dalamnya terdapat relasi antara organisme satu dengan lainnya juga antara organisme dengan lingkungan di sekelilingnya [3]. Setiap individu atau organisme tentunya perlu mengetahui kondisi lingkungan disekitarnya dengan cara memahami kekuatan alam untuk bertahan hidup.

Makhluk hidup di bumi ini sangat beraneka ragam, yang terdiri dari campuran populasi dari berbagai spesies yang hidup bersama atau disebut komunitas. Hal itu menunjukkan pada hakikatnya makhluk hidup di bumi ini tidak dapat hidup sendiri secara normal, tetapi akan saling berinteraksi dengan berbagai spesies yang ada.

Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam ekosistem alami, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa (*prey-predator*), dimana pemangsa akan memakan mangsa untuk bertahan hidup. Interaksi yang terjadi dapat berupa predasi (makan dimakan), kompetisi (persaingan) maupun simbiosis (persekutuan hidup).

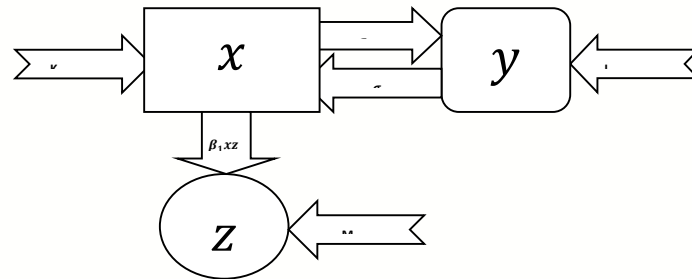
Model mangsa pemangsa dapat dimanfaatkan padatan nasional dimana mangsa dan pemangsa dapat hidup bersama. Mangsa yang harus dilestarikan dapat dilindungi dari pemangsa dengan menciptakan batasan atau tempat penampungan yang akan membagi habitat menjadi dua wilayah yaitu wilayah yang dilindungi dan wilayah bebas. Adapun yang dimaksud dengan wilayah yang dilindungi adalah pemangsa tidak diperbolehkan masuk ke dalam wilayah tersebut artinya pemangsa tidak dapat berinteraksi (memangsa) dengan mangsa, kemudian yang dimaksud dengan wilayah bebas adalah adanya percampuran dari mangsa dan pemangsa pada wilayah tersebut. Pada daerah inilah pemangsa dapat memangsa.

Pada tulisan ini dibahas suatu interaksi dari tiga spesies yang terdiri dari satu pemangsa dan dua mangsa yaitu mangsa yang berada pada daerah bebas dan pada daerah dilindungi. Disini mangsa dapat berpindah dari daerah bebas ke daerah dilindungi atau sebaliknya. Pada tulisan ini juga diasumsikan

bahwa populasi pemangsa dapat mengalami pertumbuhan tidak hanya diakibatkan oleh kehadiran mangsa, tetapi karena adanya faktor lain selain mangsa. Jadi pemangsa tidak tergantung sepenuhnya pada mangsa, tetapi tergantung sebagian pada mangsa .

### Bahan dan Metode

Pada model ini terdapat tiga populasi yang saling berinteraksi satu sama lainnya, yaitu populasi spesies mangsa di wilayah bebas, populasi spesies mangsa di wilayah yang dilindungi dan populasi spesies pemangsa. Interaksi ketiganya dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Interaksi Populasi Mangsa Pemangsa.

Dari bagan tersebut dapat dibentuk sebuah model matematika yang direpresentasikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial [1]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 xz, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y, \\ \frac{dz}{dt} &= az \left(1 - \frac{z}{M}\right) + \beta_2 xz.\end{aligned}\quad (1)$$

Notasi  $x(t)$  menyatakan kepadatan spesies mangsa di wilayah bebas,  $y(t)$  menyatakan kepadatan spesies mangsa di wilayah yang dilindungi, dan  $z(t)$  menyatakan kepadatan spesies pemangsa yang ketiganya bergantung terhadap waktu  $t > 0$ . Untuk parameter-parameternya,  $\sigma_1$  menyatakan laju perpindahan spesies mangsa dari wilayah bebas ke wilayah yang dilindungi,  $\sigma_2$  laju perpindahan spesies mangsa dari wilayah yang dilindungi ke wilayah bebas. Untuk laju pertumbuhan intrinsik masing-masing populasi mangsa di wilayah bebas, yang dilindungi serta populasi pemangsa dinyatakan dengan  $r$ ,  $s$ , dan  $a$  secara berurut. Pertumbuhan tersebut mengikuti kaidah model logistik yang memiliki batasan (*carrying capacity*) dan dinyatakan dengan  $K$  untuk spesies mangsa di wilayah bebas,  $L$  untuk spesies mangsa di wilayah yang dilindungi, dan  $M$  untuk spesies pemangsa. Parameter lainnya yaitu  $\beta_1$  yang menyatakan angka penurunan spesies mangsa yang diakibatkan spesies pemangsa, dan  $\beta_2$  yang menyatakan tingkat pertumbuhan spesies pemangsa akibat interaksi dengan spesies mangsa.

### Analisis Model

Model yang telah dibuat selanjutnya dianalisa kestabilannya, dengan terlebih dahulu mencari titik tetapnya. Untuk mencari titik tetap, dapat dilakukan dengan men-nol-kan ruas kiri pada persamaan (1) sehingga didapat sistem persamaan sebagai berikut:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 = 0 \quad (2)$$

$$sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0 \quad (3)$$

$$az \left(1 - \frac{z}{M}\right) + \beta_2 xz = 0 \quad (4)$$

Dari tiga persamaan itu, lakukan substitusi antara persamaan (2) hingga persamaan (4) dan diperoleh empat titik tetap:

1)  $F_0(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

2)  $F_1(x, y, z) = (0, 0, M)$ .

3)  $F_2(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , dimana

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sigma_2} \left[ \frac{r\tilde{x}^2}{K} - (r - \sigma_1)\tilde{x} \right], \tilde{z} = 0$$

Cukup sulit menentukan bentuk eksplisit untuk titik ekuilibrium  $F_2$ . Oleh karena itu, pada makalah ini titik ekuilibrium  $F_2$  dituliskan dalam bentuk implisit. Secara biologi tentu tidak mungkin kepadatan suatu spesies bernilai negatif. Jadi agar  $\tilde{y}$  (kepadatan spesies mangsa di wilayah yang dilindungi) bernilai positif maka syarat yang harus dipenuhi adalah :

$$\tilde{x} > \frac{K}{r} (r - \sigma_1)$$

4)  $F^*(x, y, z) = (x^*, y^*, z^*)$ , dimana

$$y^* = \frac{1}{\sigma_2} \left[ \left( \frac{r}{K} + \frac{\beta_1 \beta_2 M}{a} \right) x^{*2} - (r - \sigma_1 - \beta_1 M) x^* \right],$$

$$z^* = \frac{M}{a} (a + \beta_2 x^*)$$

Sama seperti pada  $F_2$ , titik ekuilibrium  $F^*$  dituliskan dalam bentuk implisit. Syarat yang harus dipenuhi agar  $F^*$  ada atau dengan kata lain nilai  $y^*$  bernilai positif adalah

$$x^* > \frac{(r - \sigma_1 - \beta_1 M)Ka}{(ra + \beta_1 \beta_2 MK)}$$

Pada analisis titik tetap model mangsa mangsa di wilayah yang dilindungi dengan kasus pemangsa tergantung sebagian pada mangsa menggunakan beberapa asumsi  $(r - \sigma_1) > 0$  dan  $(s - \sigma_2) > 0$ , titik tetap yang dianalisis yaitu  $F_0, F_1, F_2$ , dan  $F^*$ . Adapun tahapan-tahapan untuk analisis kestabilan titik sebagai berikut:

#### 1. Titik Tetap $F_0(0, 0, 0)$

Model pada persamaan (1) diubah menjadi persamaan linier. Pelinearan ini menggunakan matriks Jacobi yang dinotasikan dengan  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial y} & \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \sigma_1 - \beta_1 z & \sigma_2 & -\beta_1 x \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \beta_2 z & 0 & a - \frac{2az}{M} + \beta_2 x \end{pmatrix} \quad (5)$$

kemudian substitusikan  $F_0(0,0,0)$  pada persamaan (5).

$$A = \begin{pmatrix} r - \sigma_1 - \lambda & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a - \lambda \end{pmatrix} \quad (6)$$

Maka dari persamaan (6) akan diperoleh persamaan karakteristik, sebagai berikut:

$$(a - \lambda)[(r - \sigma_1 - \lambda)(s - \sigma_2 - \lambda) - \sigma_1 \sigma_2] = 0 \quad (7)$$

Pada persamaan (7) sudah terlihat bahwa terdapat sebuah nilai eigen yang bernilai positif yaitu  $\lambda_1 = a$ . Untuk nilai eigen lainnya diperoleh dari suatu polinom yang pangkat tertingginya dua, sebagai berikut:

$$\lambda^2 - (s - \sigma_2)\lambda - (r - \sigma_1)\lambda + (r - \sigma_1)(s - \sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 = 0 \quad (8)$$

Setelah memperoleh persamaan (8) maka akan diperiksa kestabilan titik tetap  $F_0$  dengan menggunakan syarat yang sudah ditentukan. Adapun syarat tersebut dapat ditulis kembali yaitu  $(r - \sigma_1)(s - \sigma_2) < \sigma_1$ ,  $(r - \sigma_1) > 0$  dan  $(s - \sigma_2) > 0$  maka akan diperoleh suatu kestabilan apakah titik tetaptersebut stabil, tidak stabil, atau *saddle*. Dengan tahapan sebagai berikut:

$$\lambda_2 + \lambda_3 = (r - \sigma_1) + (s - \sigma_2) > 0 \quad (9)$$

$$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -(r - \sigma_1)(s - \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 > 0 \quad (10)$$

Dapat dilihat pada persamaan (9) ketika penjumlahan dua buah  $\lambda$  bertanda positif, begitu juga pada persamaan (10) ketika perkalian dua buah  $\lambda$  bertanda positif maka dapat disimpulkan bahwa kedua buah  $\lambda$ -nya bernilai positif [4]. Oleh karena itu dapat ditulis bahwa  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ , dan apabila semua  $\lambda$ -nya bernilai positif maka jenis kestabilan titik  $F_0(0, 0, 0)$  adalah tidak stabil.

## 2. Titik Tetap $F_1(0, 0, M)$

Adapun untuk analisis kestabilan titik tetap  $F_1$  tahapan-tahapannya sama seperti  $F_0$ . Dimulai dari matriks jacobii untuk  $F_1$

$$A_{(0,0,M)} = \begin{pmatrix} r - \sigma_1 - \beta_1 M & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & (s - \sigma_2) & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh sebuah nilai eigen negatif  $\lambda_1 = -a$  dan persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - ((s - \sigma_2) + (r - \sigma_1 - \beta_1 M))\lambda + (r - \sigma_1 - \beta_1 M)(s - \sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 = 0$$

Dari persamaan karakteristik tersebut dapat ditentukan tanda akar-akar  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  dengan menggunakan cara seperti pada (9) dan (10). Dengan menggunakan syarat  $(r - \sigma_1 - \beta_1 M) > 0$ ,  $(s - \sigma_2)(r - \sigma_1 - \beta_1 M) < \sigma_1 \sigma_2$ ,  $(r - \sigma_1) > 0$  dan  $(s - \sigma_2) > 0$  maka dapat disimpulkan bahwa  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  bernilai positif artinya  $F_1(0, 0, M)$  adalah *saddle*. Dapat juga dikatakan bahwa  $F_1$  merupakan manifold stabil berdimensi 1 yaitu pada sumbu  $z$  dan manifold tidak stabil berdimensi 2 yaitu pada bidang  $xy$ .

## 3. Titik $F_2(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$

Adapun untuk analisis kestabilan titik  $F_2$  tahapan-tahapannya sama seperti  $F_1$ . Matriks Jacobi untuk titik  $F_2$

$$A_{(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)} = \begin{pmatrix} r - \sigma_1 - \frac{2r\tilde{x}}{K} & \sigma_2 & -\beta_1\tilde{x} \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 - \frac{2s\tilde{y}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & a + \beta_2\tilde{x} \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = a + \beta_2\tilde{x}$  dan persamaan karakteristik

$$\left(r - \sigma_1 - \frac{2r\tilde{x}}{K} - \lambda\right)\left(s - \sigma_2 - \frac{2s\tilde{y}}{L} - \lambda\right) - \sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Dengan melakukan penjumlahan dan perkalian dua akar seperti pada (9) dan (10) diperoleh

$\lambda_2 + \lambda_3 < 0$  dan  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$  dengan syarat  $(s - \sigma_2)(r - \sigma_1) < \sigma_1\sigma_2$ ,  $(r - \sigma_1) < 0$  dan  $(s - \sigma_2) < 0$  sehingga dapat disimpulkan bahwa titik  $F_2(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$  bersifat *saddleyaitu* manifold tidak stabil berdimensi-1 pada sumbu z dan manifold stabil berdimensi 2 pada bidang xy.

4. Untuk  $F^*(x^*, y^*, z^*)$

Pada titik  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  untuk mencari jenis kestabilannya berbeda dengan titik  $F_0, F_1$ , dan  $F_2$ . Pada titik  $F^*$  akan dicari dengan menggunakan metode *Lyapunov*.

**Teorema 1.** Titik tetap  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  adalah stabil asimtotik lokal apabila terpenuhi syarat sebagai berikut:

- (i)  $(r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1z^*$ .
- (ii)  $4\left(r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1z^*\right)\left(s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2\right) > (\sigma_2^2)$ .

Untuk mengetahui  $F^*$  bersifat stabil asimtotik maka akan dicari menggunakan metode *Lyapunov*. Untuk lebih jelas akan dipaparkan dengan pembuktian sebagai berikut:

**Bukti**

Misal

$$x = x^* + A, \quad y = y^* + B, \quad z = z^* + C \tag{11}$$

dan diberikan sebuah fungsi *Lyapunov* sebagai berikut:

$$V(t) = \frac{1}{2}A^2 + c_1\frac{1}{2}B^2 + c_2\frac{1}{2}C^2 \tag{12}$$

dimana  $c_1$  dan  $c_2$  konstan positif. Dapat dilihat jelas bahwa Fungsi *Lyapunov* pada (12) selalu bernilai positif.

Hal pertama yang harus dilakukan pada pembuktian ini adalah dengan menurunkan fungsi *Lyapunov* pada persamaan (12), kemudian dikalikan dengan persamaan (1). Berikut adalah tahapan-tahapannya

$$\dot{V}(t) = A \frac{dx}{dt} + c_1B \frac{dy}{dt} + c_2C \frac{dz}{dt} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= A \left( rx - \frac{rx^2}{K} - \sigma_1x + \sigma_2y - \beta_1xz \right) + c_1B \left( sy - \frac{sy^2}{L} + \sigma_1x - \sigma_2y \right) \\ &+ c_2C \left( az \left( 1 - \frac{z}{M} \right) + \beta_2xz \right) \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan persamaan (11) sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= A \left( r(x^* + A) - \frac{r(x^* + A)^2}{K} - \sigma_1(x^* + A) + \sigma_2(y^* + B) - \beta_1(x^* + A)(z^* + C) \right) \\ &+ c_1B \left( s(y^* + B) - \frac{s(y^* + B)^2}{L} + \sigma_1(x^* + A) - \sigma_2(y^* + B) \right) \\ &+ c_2C \left( a(z^* + C) \left( 1 - \frac{(z^* + C)}{M} \right) + \beta_2(x^* + A)(z^* + C) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \left( r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \beta_1z^* \right) A^2 + c_1 \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) B^2 + AB(\sigma_2 + c_1\sigma_1) \\ &+ AC(c_2\beta_2z^* - \beta_1x^*) \tag{14} \end{aligned}$$



dimana  $c_2 = \frac{\beta_1 x^*}{\beta_2 z^*}$  dan  $c_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ . Fungsi *Lyapunov* akan memenuhi  $\dot{V}(t) > 0$  (definit positif) jika dan hanya jika  $a > 0$  dan  $4ac - b^2 > 0$  dan  $\dot{V}(t) < 0$  (definit negatif) jika dan hanya jika  $a < 0$  dan  $4ac - b^2 > 0$  [2]. Syarat yang kedua (definit negatif) merupakan syarat agar diperoleh keadaan stabil asimtotik. Maka untuk nilai

$$a = (r - \sigma_1) - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^*$$

akan bernilai negatif dengan syarat

$$(r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^*$$

dan

$$4ac - b^2 = 4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) - (\sigma_2^2)$$

akan bernilai positif dengan syarat

$$4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2)$$

Jadi titik tetap  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  akan bersifat stabil asimtotik lokal apabila  $V(t) > 0$  dan  $\dot{V}(t) < 0$  [5] yang dipenuhi dengan syarat

$$(i) \quad (r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^*$$

$$4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2)$$

Pada titik  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  untuk mencari jenis kestabilannya berbeda dengan titik  $F_0$ ,  $F_1$ , dan  $F_2$ . Pada titik  $F^*$  akan dicari dengan menggunakan metode *Lyapunov*.

**Teorema 1.** Titik tetap  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  adalah stabil asimtotik lokal apabila terpenuhi syarat sebagai berikut:

$$(iii) \quad (r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^*.$$

$$(iv) \quad 4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2).$$

Untuk mengetahui  $F^*$  bersifat stabil asimtotik maka akan dicari menggunakan metode *Lyapunov*. Untuk lebih jelas akan dipaparkan dengan pembuktian sebagai berikut:

### Bukti

Misal

$$x = x^* + A, \quad y = y^* + B, \quad z = z^* + C \quad (11)$$

dan diberikan sebuah fungsi *Lyapunov* sebagai berikut:

$$V(t) = \frac{1}{2}A^2 + c_1 \frac{1}{2}B^2 + c_2 \frac{1}{2}C^2 \quad (12)$$

dimana  $c_1$  dan  $c_2$  konstan positif. Dapat dilihat jelas bahwa Fungsi *Lyapunov* pada (12) selalu bernilai positif.

Hal pertama yang harus dilakukan pada pembuktian ini adalah dengan menurunkan fungsi *Lyapunov* pada persamaan (12), kemudian dikalikan dengan persamaan (1). Berikut adalah tahapan-tahapannya

$$\dot{V}(t) = A \frac{dx}{dt} + c_1 B \frac{dy}{dt} + c_2 C \frac{dz}{dt} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & A \left( rx - \frac{rx^2}{K} - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 xz \right) + c_1 B \left( sy - \frac{sy^2}{L} + \sigma_1 x - \sigma_2 y \right) \\ & + c_2 C \left( az \left( 1 - \frac{z}{M} \right) + \beta_2 xz \right) \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan persamaan (11) sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & A \left( r(x^* + A) - \frac{r(x^* + A)^2}{K} - \sigma_1(x^* + A) + \sigma_2(y^* + B) - \beta_1(x^* + A)(z^* + C) \right) \\ & + c_1 B \left( s(y^* + B) - \frac{s(y^* + B)^2}{L} + \sigma_1(x^* + A) - \sigma_2(y^* + B) \right) \\ & + c_2 C \left( a(z^* + C) \left( 1 - \frac{(z^* + C)}{M} \right) + \beta_2(x^* + A)(z^* + C) \right) \\ \dot{V}(t) = & \left( r - \frac{2rx^*}{K} - \sigma_1 - \beta_1 z^* \right) A^2 + c_1 \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) B^2 + AB(\sigma_2 + c_1 \sigma_1) \\ & + AC(c_2 \beta_2 z^* - \beta_1 x^*) \quad (14) \end{aligned}$$

dimana  $c_2 = \frac{\beta_1 x^*}{\beta_2 z^*}$  dan  $c_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ . Fungsi *Lyapunov* akan memenuhi  $\dot{V}(t) > 0$  (definit positif) jika dan hanya jika  $a > 0$  dan  $4ac - b^2 > 0$  dan  $\dot{V}(t) < 0$  (definit negatif) jika dan hanya jika  $a < 0$  dan  $4ac - b^2 > 0$  [2]. Syarat yang kedua (definit negatif) merupakan syarat agar diperoleh keadaan stabil asimtotik. Maka untuk nilai

$$a = (r - \sigma_1) - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^*$$

akan bernilai negatif dengan syarat

$$(r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^*$$

dan

$$4ac - b^2 = 4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) - (\sigma_2^2)$$

akan bernilai positif dengan syarat

$$4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2)$$

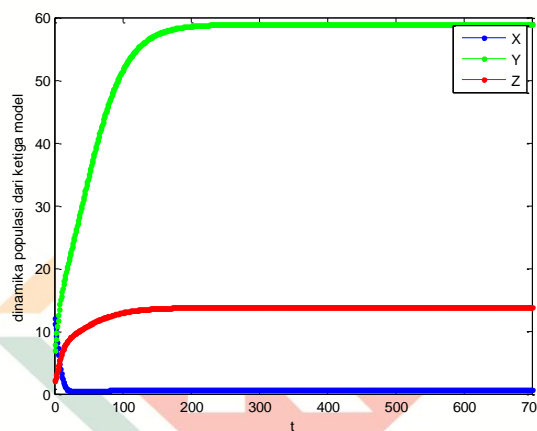
Jadi titik tetap  $F^*(x^*, y^*, z^*)$  akan bersifat stabil asimtotik lokal apabila  $V(t) > 0$  dan  $\dot{V}(t) < 0$  [5] yang dipenuhi dengan syarat

$$(ii) \quad (r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^*$$

$$4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2)$$

**Simulasi Model**

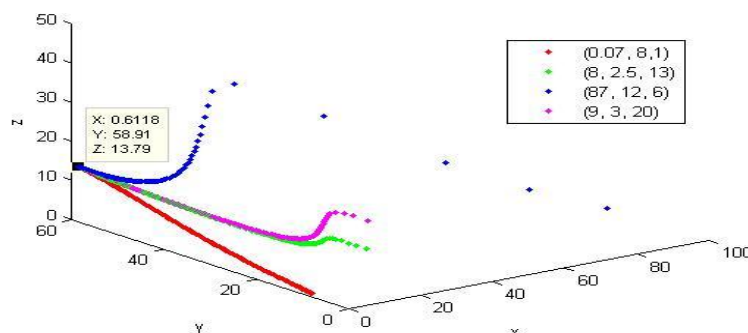
Pada bagian ini dibahas mengenai simulasi model mangsa pemangsa. Simulasi dilakukan sebagai pendekatan solusi dari sistem persamaan diferensial(1) dengan menggunakan metode numerik Adam-Bashfort-Moulton dan untuk parameter terhadap model tersebut menggunakan data acak. Nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut.  $a = 4, r = 5, s = 4.5, K = 50, L = 60, M = 10, \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \sigma_1 = 12,$  dan  $\sigma_2 = 0.5.$  nilai awal adalah  $x = 12, y = 7$  dan  $z = 2$



Gambar 2. Dinamika Populasi Dua Mangsa dan Satu Pemangsa

Gambar 2 menunjukkan bahwa kepadatan spesies mangsa dari wilayah yang dilindungi  $y(t)$  lebih besar dari kepadatan spesies mangsa dari wilayah bebas  $x(t)$  hal tersebut disebabkan mangsa yang berada di wilayah bebas akan banyak berinteraksi dengan pemangsa yang juga hanya terdapat pada wilayah bebas. Dapat juga dilihat bahwa ketiga populasi akan mencapai kestabilan pada saat  $t$  mencapai 589 satuan waktu sebesar  $x(t) = 0,611782, y(t) = 58,910725,$  dan  $z(t) = 13,793122.$  Nilai tersebut tidak berbeda dengan teori yang telah disampaikan pada bagian sebelumnya yaitu  $f^*(x^*, y^*, z^*) = (0.611782, 58.910725, 13.79312)$  dengan keadaan stabil asimtotik lokal

Grafik ADAM-BM X, Y, Z



Gambar 3. Dinamika Populasi Mangsa Pemangsa menggunakan Tiga Dimensi

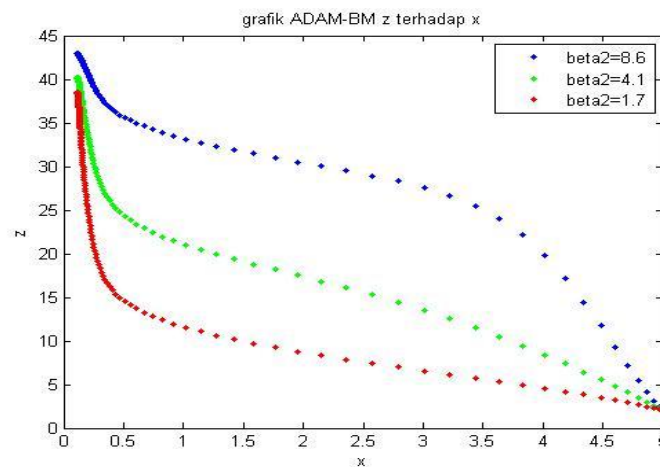


Pada Gambar 3, ditunjukkan dinamika ketiga populasi dengan parameter yang sama tetapi dengan empat nilai awal yang berbeda. Ternyata keempat grafik tersebut sama-sama memperlihatkan bahwa, seluruhnya menuju titik  $f^*(x^*, y^*, z^*)$  juga. Dimana parameter yang digunakan telah memenuhi persyaratan

$$(r - \sigma_1) < \frac{2rx^*}{K} + \beta_1 z^* \text{ dan}$$

$$4 \left( r - \sigma_1 - \frac{2rx^*}{K} - \beta_1 z^* \right) \left( s - \frac{2sy^*}{L} - \sigma_2 \right) > (\sigma_2^2)$$

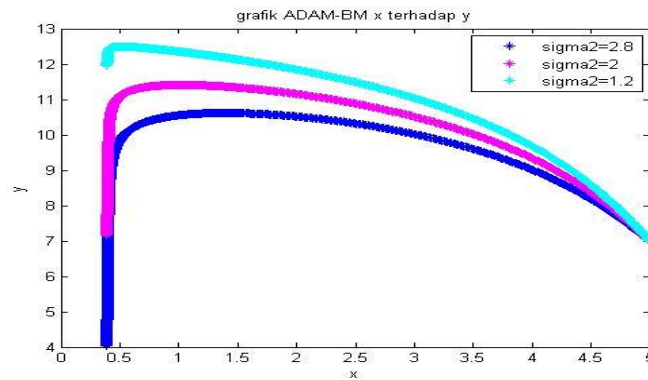
Gambar 4 memperlihatkan hubungan antara spesies mangsa  $x(t)$  dan spesies pemangsa  $z(t)$  di wilayah bebas.



Gambar 4. Dinamika Populasi Spesies Pemangsa

Nilai parameter yang diberikan sebagai berikut.  $a = 5, r = 7, s = 1.5, K = 45, L = 20, M = 35, \beta_1 = 2.5, \sigma_1 = 4.2$ , dan  $\sigma_2 = 1.2$  serta  $x = 5, y = 7$  dan  $z = 2$ . Adapun untuk  $\beta_2$  diberikan nilai yang berbeda-beda yaitu 8.6, 4.1, 1.7. Jadi tiga buah grafik pada gambar 4 merupakan grafik untuk masing-masing nilai  $\beta_2$  yang berbeda. Terlihat bahwa ketika keadaan  $x(t)$  mengalami penurunan akibat dimangsa oleh pemangsa  $z(t)$  maka secara otomatis kepadatan spesies pemangsa  $z(t)$  akan mengalami pertumbuhan. Untuk  $\beta_2$  (pertumbuhan spesies pemangsa), ketika nilainya semakin besar maka akan mengakibatkan pertumbuhan  $z(t)$  akan semakin tinggi. Pada saat waktu tertentu kepadatan spesies pemangsa  $z(t)$  saat  $t = 1964$  akan mencapai 42.98024 dengan  $\beta_2 = 8.6$ , kemudian pada saat  $t = 1908$  akan mencapai 40.10593 dengan  $\beta_2 = 4.1$ , begitu juga pada saat  $t = 1869$  akan mencapai 38.38403 dengan  $\beta_2 = 1.7$ .

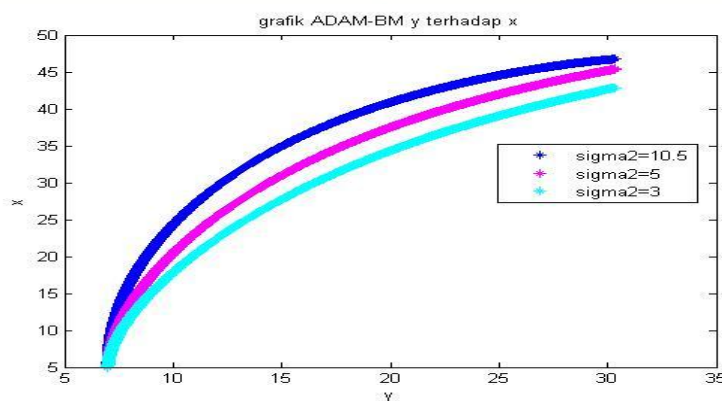
Gambar 5 berikut adalah dinamika mangsa yang berada di wilayah bebas dan mangsa di wilayah yang dilindungi. nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut  $a = 16, r = 7, s = 1.5, K = 45, L = 20, M = 35, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.001, \sigma_1 = 8.5, \sigma_2 = (2.8, 2, 1.2)$ , serta  $x = 5, y = 7$  dan  $z = 2$ .



Gambar 5. Dinamika Populasi Spesies Mangsa  $\beta_1 \geq 1$  dan  $\sigma_1 > \sigma_2$

Untuk kasus ini dilakukan input nilai  $\sigma_2$  yang berbeda yaitu 2.8, 2, dan 1.2 dimana  $\sigma_2$  merupakan perpindahan koefisien mangsa dari wilayah yang dilindungi ke wilayah bebas. Ketika  $\sigma_2$  semakin kecil maka mangsa yang berada di wilayah yang dilindungi akan semakin tinggi pertumbuhannya. Pertumbuhan mangsa tersebut bukan hanya di akibatkan oleh  $\sigma_2$  saja akan tetapi ada faktor lain yaitu  $\beta_1$ . Dimana pemangsa memiliki kemampuan yang tinggi untuk berinteraksi dengan mangsa yang berada di wilayah bebas. Jadi keadaan mangsa di wilayah bebas akan menurun pertumbuhannya dan mangsa di wilayah yang dilindungi akan naik pertumbuhannya. Adapun untuk pertumbuhan mangsa yang di wilayah yang dilindungi pada saat  $t = 1787$  akan mencapai 11.999959 untuk kasus  $\sigma_2 = 1.2$ , dan akan mencapai 7.999650 ribu ketika  $t = 1508$  untuk kasus  $\sigma_2 = 2$ , serta mencapai 4.999668 ribu ketika  $t = 1556$  untuk kasus  $\sigma_2 = 2.8$ .

Gambar 6 memperlihatkan dinamika mangsa yang berada di wilayah bebas dan mangsa yang berada di wilayah yang dilindungi. Nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut,  $a = 16$ ,  $r = 7$ ,  $s = 1.5$ ,  $K = 45$ ,  $L = 20$ ,  $M = 35$ ,  $\beta_1 = 0.001$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\sigma_1 = 2.5$ ,  $\sigma_2 = (10.5, 5, 3)$ . Nilai awal yang diberikan adalah  $x = 5$ ,  $y = 7$  dan  $z = 2$



Gambar 6 Dinamika Populasi Spesies Mangsa  $\beta_1 < 1$  dan  $\sigma_1 < \sigma_2$

Untuk kasus ini dilakukan input nilai  $\sigma_2$  yang berbeda yaitu 10.5, 5, dan 3 dimana  $\sigma_2$  menyatakan laju perpindahan mangsa dari wilayah yang dilindungi ke wilayah bebas. Ketika  $\sigma_2$  semakin besar maka mangsa yang berada di wilayah bebas akan semakin tinggi pertumbuhannya. Dan sebaliknya keadaan mangsa di wilayah yang dilindungi akan semakin menurun pertumbuhannya. Hal tersebut di dipengaruhi juga oleh  $\beta_1 < 1$  yang artinya pemangsa memiliki peran yang kecil untuk berinteraksi dengan mangsa di wilayah bebas. adapun untuk pertumbuhan mangsa di wilayah bebas pada saat  $t = 1314$  akan mencapai 46.002987 untuk kasus  $\sigma_2 = 10.5$ , dan akan mencapai 45.001242 ketika  $t = 1627$  untuk kasus  $\sigma_2 = 5$ , serta akan mencapai 42.002752 ketika  $t = 1470$  untuk kasus  $\sigma_2 = 3$ .

### Kesimpulan

Dinamika populasi mangsa pemangsa yang diperlihatkan pada simulasi menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa akan menuju titik tetap yang sama seperti pada Bagian 3 meskipun nilai awal yang digunakan berbeda-beda.

Pertumbuhan mangsa tidak hanya dipengaruhi oleh  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$ , yaitu laju perpindahan mangsa dari wilayah yang dilindungi ke wilayah bebas atau sebaliknya, akan tetapi juga dipengaruhi oleh faktor lain seperti  $\beta_1$  yakni kemampuan pemangsa dalam berinteraksi (memangsa) dengan mangsa yang berada di wilayah bebas.

Jadi untuk kasus  $\beta_1 \geq 1$  yang artinya pemangsa memiliki peran yang besar untuk berinteraksi (memangsa) dengan mangsa, populasi mangsa di wilayah bebas akan menurun pertumbuhannya. Dan sebaliknya apabila  $\beta_1 < 1$  yang artinya pemangsa memiliki peran yang kecil untuk berinteraksi (memangsa) dengan mangsa, maka populasi mangsa di wilayah bebas dapat mengalami kenaikan.

### Referensi

- [1] Dubey, B. A prey-predator model with a reserved area, *Nonlinear analysis: modeling and control*, **12(4)**:479-494, 2007.
- [2] Boyce, W.E dan Dprima, R.C. *Elementary differential equation and boundary value problems*, Seventh edition, Jhon Wiley & Sons, 2001.
- [3] Odum, Eugene P., dan Barrett, Gary W., *Fundamentals of Ecology*, Fifth Edition, Thomson.
- [4] Haberman, R. *Mathematical Model: Mechanical Vibration, Population Dynamics, and Traffc Flow. An Inroduction to Applied Mathematics*, SIAM, 1998.
- [5] Perko, L. *Differential Equations And Dynamical System*, TAM 7, Springer Verlag New York, 1991.