Volume 1 No. 1 Edisi April 2015 ISSN : 2338-0896

Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial yang Dipangkatkan dan Distribusi Campuran Eksponensial untuk Data Masa Hidup

Imas Sukarsih[1, a)], Asep Solih Awalluddin[2, b)] , dan Elis Ratna Wulan[3, c)]

[1, 2, 3]*Jurusan Matematika, Fakultas Saisn dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati*
Jl. A. H Nasution No. 105 Bandung

[a)] *imas.sukarsihmath@gmail.com*
[b)] *aasolih@gmail.com*
[c)] *elisrwulan@yahoo.com*

Abstrak

Tulisan ini membahas tentang estimasi parameter distribusi eksponensial yang dipangkatkan dan distribusi campuran eksponensial. Distribusi eksponensial yang dipangkatkan merupakan perluasan dari distribusi eksponensial standar yang fungsinya diambil dari fungsi distribusi kumulatif yang kemudian dipangkatkan. Distribusi lainnya adalah distribusi campuran eksponensial, distribusi campuran eksponensial merupakan kombinasi linier dari dua atau lebih distribusi eksponensial standar yang bobot dan parameternya berbeda. Estimasi parameter dari distribusi eksponensial yang dipangkatkan dan distribusi campuran eksponensial secara analitis diturunkan melalui metode maksimum likelihood, sehingga diperoleh hasil estimasi untuk masing-masing parameter kedua distribusi tersebut. Estimasi distribusi eksponensial yang dipangkatkan pada data masa hidup pendingin pesawat dilakukan dengan menggunakan metode Newton Raphson. Dari hasil estimasi tersebut selanjutnya dilakukan analisis keandalan untuk data masa hidup.

Kata kunci: Distribusi Eksponensial yang Dipangkatkan, Distribusi Campuran Eksponensial, Estimasi Maksimum Likelihood, Reliabilitas, Metode Newton raphson

Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini berlangsung sangat pesat, hal ini mendorong manusia untuk terus berupaya memanfaatkan kemajuan teknologi tersebut yang diantaranya diwujudkan melalui penelitian-penelitian. Penelitian yang dilakukan dapat berupa penelitian yang bertujuan untuk menemukan dan menyelesaikan masalah-masalah baru, mengembangkan pengetahuan yang sudah ada maupun penelitian dalam menguji kebenaran suatu pengetahuan. Dalam bidang matematika, statistika yang sudah berkembang begitu jauh dengan adanya penemuan berbagai alat analisis untuk berbagai keperluan estimasi, pengujian dan metode peramalan. Selain itu, statistica juga berperan aktif untuk menangani masalah keandalan terhadap suatu individu atau komponen**[5].** Reliabilitas atau keandalan merupakan analisis statistik yang membahas tentang daya tahan hidup suatu benda atau individu dalam keadaan operasional tertentu. Penerapan dari analisis ini banyak dilakukan dibidang kedokteran berkaitan dengan pemodelan ketahanan hidup penderita penyakit tertentu dan dibidang produksi yang berkaitan dengan pemodelan tentang ketahanan hidup benda-benda produksi.**[6]**

Distribusi yang digunakan dalam tulisan ini adalah distribusi eksponensial. Namun, dengan berjalannya waktu banyak masalah yang tidak bisa diselesaikan dengan distribusi yang sudah ada, sehingga perluasan dari berbagai distribusi telah banyak dikaji oleh para ahli. Perluasan dari berbagai distribusi tersebut merupakan alternative lain dalam penyelesaian masalah pada analisis data masa hidup. Salah satu perluasan dari distribusi tersebut adalah distribusi eksponensial yang disebut dengan distribusi eksponensial yang dipangkatkan.**[3]** Alternatif bentuk distribusi lainnya adalah distribusi campuran eksponensial. Distribusi campuran eksponensial merupakan kombinasi linear dari dua atau lebih distribusi eksponensial dengan bobot dan parameter yang berbeda.

Distribusi eksponensial yang dipangkatkan dan distribusi campuran eksponensial dapat digunakan untuk menganalisis keandalan atau reliabilitas dari data masa hidup suatu benda atau individu yang penaksir parameternya ditentukan dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Selain itu, dilakukan juga pencarian nilai parameter dari distribusi eksponensial yang dipangkatkan dengan menggunakan metode Newton Raphson yang kemudian dilakukan analisis keandalan untuk data masa hidup pendingin pesawat.

Bagian pertama dalam tulisan ini membahas mengenai motivasi dari pembahasan yang akan dilakukan, selanjutnya teori dasar, hasil dan pembahasan, perhitungan numerik sebagai contoh perhitungan estimasi.

Konsep Dasar Peluang

1. Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif atau *Cumulative Distribution Function (CDF)* adalah fungsi yang menjumlahkan nilai kemungkinan sampai suatu kejadian tertentu. Atau dituliskan dengan $P(X \leq x_i)$.**[5]** Fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dari suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat peluang $f(x)$adalah: **[10]**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dxuntuk - \infty < x < \infty$$

2. Reliabilitas (Keandalan)

Analisis data uji hidup atau reliabilitas (keandalan) merupakanan alisis statistik yang membahas tentang daya tahan hidup suatu benda atau individu dalam keadaan operasional tertentu. Penerapan analisis ini biasanya banyak dilakukan dibidang kedokteran berkaitan dengan pemodelan ketahanan hidup penderita penyakit tertentu dan dibidang produksi berkaitan dengan pemodelan tentang ketahanan hidup benda-benda produksi.**[7]** Reliabilitas dari sebuah sistem dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut: **[3]**

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt, \qquad (2.1)$$

Analisis uji reliabilitas dapat dilakuakan dengan menentukan tingkat kegagalan yang disebut dengan *hazard rate* yang merupakan ukuran laju kegagalan pada waktu tertentu. *Hazard rate* merupakan probabilitas bersyarat suatu komponen gagal dalam waktu interval terkecil yang didefinisikan dengan:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}, \qquad (2.2)$$

Kumulatif *hazard rate* dinotasikan dengan $H(t)$. Fungsi ini secara umum digunakan untuk menghitung rata-rata tingkat kegagalan. Formulasi untuk mencari rata-rata kumulatif *hazard rate* dinyatakan dengan: **[3]**

$$\mathrm{H}(t) = \int_{\infty}^{t} f(u)du = -\mathrm{In}\, R(t), \qquad (2.3)$$

3. Estimasi Maksimum Likelihood

Estimasi maksimum likelihood atau *Maximum Likelihood Estimation(MLE)* merupakan salah satu pendekatan yang penting dalam sebuah statistika inferensi. Metode terbaik yang dapat digunakan dalam menentukan penaksir titik sebuah parameter. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan sebuah sampel acak berukuran n, fungsi likelihood dari sampel acak itu adalah :

$$L(\theta) = f(X_1, \theta)\, f(X_2, \theta) f(X_3, \theta) \ldots f(X_n, \theta), \qquad (2.4)$$

Fungsi densitas bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ dari variabel-variabel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah distribusi gabungan dari peubah acak. Ini sering disebut sebagai fungsi likelihood. Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n$, fungsi likelihood merupakan fungsi dari θ dan akan dinotasikan dengan $L(\theta)$, yakni $L(\theta) = f(x1, \dots, xn;\ \theta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari $f(x, \theta)$ maka: **[10]**

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^{n} f(x_i, \theta), \tag{2.5}$$

4. Distribusi Campuran

Distribusicampuran(*mixture distribution*)pertama kali dikenalkanoleh Karl Pearson padaawaltahun 1890-an. Distribusi campuran merupakan kombinasi linier dari dua atau lebih fungsi densitas peluang. Fungsi densitas campuran berhingga dapat ditulis:**[8]**

$$f(x, \theta) = \sum_{i=1}^{k} p_i f_i(x, \theta_i);\quad (x \in S), \tag{2.6}$$

5. Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson atau metode Newton adalah salah satu metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Berikut persamaan yang digunakan untuk mencari titik pendekatan ke $i + 1$yang dituliskan dengan:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad \text{dengan } f'(x_i) \neq 0, \tag{2.7}$$

Metode Newton Raphson ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $f'(x_i) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ sama dengan nol. **[7]**

Hasil dan Diskusi

1. Estimasi Parameter Distribusi Eksponensial yang Dipangkatkan

Distribusi eksponensial yang dipangkatkan merupakan perluasan dari distribusi eksponensial dengan fungsi distribusi $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$, dengan parameter β > 0. Distribusi eksponensial yang dipangkatkan pertama kali diperkenalkan oleh Guptu dan Kundu **[2]**. Distribusi eksponensial yang dipangkatkan ini diambil dari salah satu fungsi kumulatif yang digunakan pada pertengahan abad 19 oleh Gomvertz dan Verhulst untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk. Bentuk distribusi eksponensial yang dipangkatkan adalah sebagai berikut :

$$G(x) = \left(1 - e^{-\beta x}\right)^{\alpha}, \tag{3.1}$$

dimana $x > 0$,$\beta > 0$, dan $\alpha > 0$, dengan fungsi padat peluangnya adalah:**[4]**

$$g(x) = \alpha\beta e^{-\beta x}(1 - e^{-\beta x})^{\alpha - 1}, \tag{3.2}$$

Fungsi Reliabilitas dari distribusi eksponensial yang dipangkatkan diperoleh berdasarkan pada persamaan (2.1), yaitu:

$$R(x) = 1 - \left[\left(1 - e^{-\beta x}\right)^{\alpha}\right], \tag{3.3}$$

Hazard rate atau tingkat kegagalan diperoleh berdasarkan persamaan(2.2), yaitu:

$$h(x) = \frac{\alpha\beta e^{-\beta x}(1-e^{-\beta x})^{\alpha-1}}{1-[(1-e^{-\beta x})^{\alpha}]}, \tag{3.4}$$

untuk menghitung rata-rata tingkat kegagalan atau kumulatif *hazard rate* berdasarkan persamaan (2.3), yaitu:

$$H(x) = -In\left[1 - (1 - e^{-\beta x})^{\alpha}\right], \tag{3.5}$$

Berdasarkan pada persamaan (2.5) diperoleh persamaan likelihood sebagai berikut:

$$L(\alpha, \beta) = \alpha^n \beta^n e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{t=1}^{n} (1 - e^{-\beta x_i})^{\alpha - 1}, \tag{3.6}$$

Log-likelihoodnya adalah:

$$\ell(\alpha,\beta) = nIn\alpha + nIn\beta - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i + \left[(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} In\left(1-e^{-\beta x_i}\right)\right], \quad (3.7)$$

diperoleh $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ sebagai berikut :

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} In\left[1-e^{-\hat{\beta}x_i}\right]}, \quad (3.8)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i - (\hat{\alpha}-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-\hat{\beta}x_i}}\left(x_i e^{-\hat{\beta}x_i}\right)}, \quad (3.9)$$

2. Estimasi Parameter Distribusi Campuran Eksponensial

Distribusi campuran eksponensial merupakan kombinasi linier dari dua atau lebih distribusi eksponensial dengan bobot dan parameter yang berbeda. Distribusi campuran eksponensial terdiri dari jumlah komponen terbatas dan tidak terbatas. Dalam kajian ini, hanya akan membahas tentang distribusi campuran eksponensial dengan jumlah komponen terbatas, dimana distribusi campuran eksponensialnya terbatas pada dua komponen ($k = 2$), yaitu $i = 1,2$. Oleh karena itu, terdapat dua proporsi campuran $p_1$dan p_2, serta dua parameter skala β_1 dan β_2.

Fungsi padat peluang distribusi campuran eksponensial sebanyak k komponen adalah:

$$f(x,\theta) = \sum_{i=1}^{k} p_i\beta_i e^{-\beta_i x}, \quad (3.10)$$

Fungsi padat peluang untuk distribusi campuran eksponensial dengan dua komponendiperolehdaripersamaan (3.10) sebagai berikut:

$$f(x,\theta) = p_1\left[\beta_1 e^{-\beta_1 x}\right] + p_2\left[\beta_2 e^{-\beta_2 x}\right], \quad (3.11)$$

Fungsi distribusi kumulatif atau *Cumulative Distribution Function (CDF)* distribusi campuran eksponensial sebanyak dua komponen komponen adalah:

$$F(x,\theta) = p_1\left(1-e^{-\beta_1 x}\right) + p_2\left(1-e^{-\beta_2 x}\right), \quad (3.12)$$

Fungsi reliabilitas dari distribusi campuran eksponensial dengan dua komponen untuk menganalisis reliabilitas atau keandalan sampai terjadinya suatu kegagalan adalah:

$$R(x,\theta) = 1 - \left[p_1\left(1-e^{-\beta_1 x}\right) + p_2\left(1-e^{-\beta_2 x}\right)\right] \quad (3.13)$$

Hazard rate atau tingkat kegagalan dan kumulatif *hazard rate*nya sebagai berikut:

$$h(x,\theta) = \frac{p_1\left[\beta_1 e^{-\beta_1 x}\right] + p_2\left[\beta_2 e^{-\beta_2 x}\right]}{1-\left[p_1\left(1-e^{-\beta_1 x}\right)+p_2\left(1-e^{-\beta_2 x}\right)\right]}, \quad (3.14)$$

$$\mathrm{H}(x,\theta) = -In\left[1-\left[p_1\left(1-e^{-\beta_1 x}\right) + p_2\left(1-e^{-\beta_2 x}\right)\right]\right] \quad (3.15)$$

Estimasi parameter dari distribusi campuran eksponensialdengan$k$ komponen, dimana r adalah satuan yang gagal selama $(0, x_r)$, r_1 satuan pertama dari sub-populasi dan r_2 satuan kedua dimana $r = r_1 + r_2$. $n - r$ adalah satuan yang tidak dapat diidentifikasi sebagai sub-populasi. Sedangkan untuk $i = 1,2$; $j = 1, \dots, r_i$ dan x_{ij} menunjukkan waktu kegagalan dari satuan yang termasuk dalam sub-populasi sepanjang i dan $x_{ij} \le x_0$. Maka dengan menggunakan metode maksimum Likelihood diperoleh:**[1]**

$$(\theta, \underline{x}) = \prod_{j=1}^{r_i}\sum_{i=1}^{2} p_i\beta_i\, e^{-\beta_i x_{ij}}[R(x_r,\theta)]^{n-r}$$

$$= {p_1}^{r_1}{\beta_1}^{r_1}{p_2}^{r_2}{\beta_2}^{r_2}\left(e^{-\sum_{j=1}^{r_1}\beta_1 x_{1j} - \sum_{j=1}^{r_2}\beta_2 x_{2j}}\right)[R(x_r,\theta)]^{n-r} \quad (3.16)$$

Log-likelihood distribusi campuran eksponensial dengan dua komponendiperolehdaripersamaan (3.16), yaitu:

$$(\theta,\underline{x}) = InL(\theta,\underline{x})$$

$$= r_1 Inp_1 + r_1 In\beta_1 + r_2 Inp_2 + r_2 In\beta_2 - \beta_1 \sum_{j=1}^{r_1} x_{1j} - \beta_2 \sum_{j=1}^{r_2} x_{2j} +$$

$$(n-r)In[R(x_r,\theta)]^{n-r}, \tag{3.17}$$

Untuk memperoleh $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ dilakukan penurunan terhadap masing-masing parameter dengan menurunkan persamaan (3.17) terhadap masing-masing parameter sama dengan nol, dengan $R(x_r,\theta) = 1 - \left[p_1\left(1 - e^{-\beta_1 x_r}\right) + p_2\left(1 - e^{-\beta_2 x_r}\right)\right]dan= r$, diperoleh :

$$\hat{p}_1 = \frac{r_1}{n}, \tag{3.18}$$

$$\hat{p}_2 = 1 - \frac{r_1}{n} \tag{3.19}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_1}{\sum_{j=1}^{r_1} x_{1j}} \tag{3.20}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{r_2}{\sum_{j=1}^{r_2} x_{2j}} \tag{3.21}$$

3. Perhitungan Numerik
   a. Data Masa Hidup

Data yang digunakanpadadistribusi eksponensial yang berupa data sekunder, dimanadatanyaberupadata masa hidup pendingin pesawat.**[2]**

Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan suatu persoalan dimana perhitungan secara analitis tidak dapat digunakan. Metode numerik disajikan dalam bentuk algoritma yang dapat dihitung secara mudah dan cepat. Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan, maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain perhitungan dalam metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus menerus diperoleh hasil yang semakin mendekati nilai eksak. **[7]**

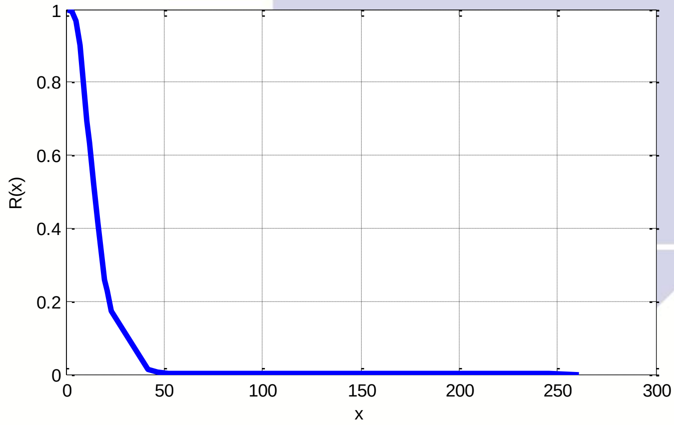
Penaksiran parameter distribusi dari fungsi likelihood distribusi eksponensial yang dipangkatkanpada data masa hidup pendingin pesawat dengan menggunakan algoritma Newton Raphson, diperoleh hasil $\hat{\beta} = 0.143511$dan $\hat{\alpha} = 5.108560$.

   b. Analisis Reliabilitas Distribusi Eksponensial yang Dipangakatkan untuk Data Masa Hidup

Reliabilitas secara umum berkaitan dengan ketahanan produk, yang berartibahwa peluang suatu pendingin pesawat akan melaksanakan fungsinya dalam periode waktu tertentu di bawah kondisi yang diberikan. Oleh karena itu, pendingin pesawat dikatakan mengalami kegagalan jika pendingin pesawat tersebut berhenti melakukan fungsinya atau tidak bisa digunakan lagi dalam. Untuk mengetahui reliabilitas atau keandalan dari pendingin pesawat tersebut, dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter yang telah diperoleh pada tahap estimasi, yaitu $\hat{\beta} = 0.143511$ dan $\hat{\alpha} = 5.108560$ pada persamaan (3.9), maka diperoleh fungsi reliabilitas distribusi sebagai berikut:

$$R(x) = 1 - [(1 - e^{-0.143511x})^{5.108560}], \tag{3.22}$$

Berdasarkan persamaan (3.22) di atas, diperoleh bentuk grafik fungsi reliabilitas sebagai berikut:

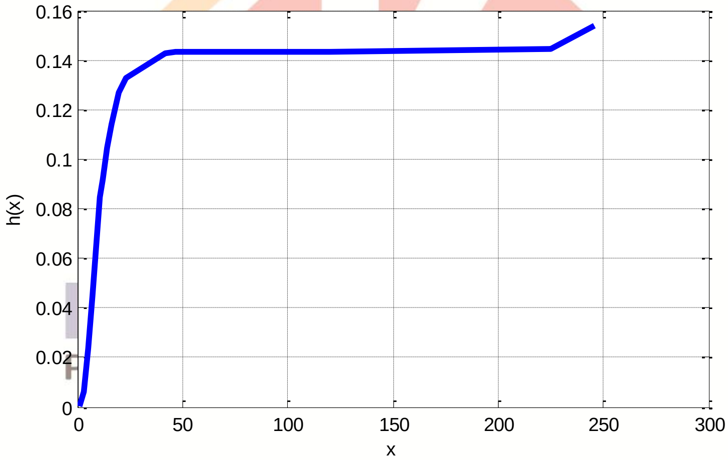


Gambar 3.1 Grafik fungsi reliabilitas distribusi eksponensial yang dipangatkan untuk data masa hidup pendingin pesawat

Gambar 3.1 menunjukkan bahwa reliabilitas atau keandalan dari pendingin pesawat akan melaksanakan fungsi yang diharapkan untuk periode waktu yang lama dengan nilai tahan hidup yang semakin kecil.*Hazard rate* atau tingkat kegagalan diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter $\hat{\beta} = 0.143511$ dan $\hat{\alpha} = 5.108560$pada persamaan (3.4), sehingga:

$$h(x) = \frac{(5.108560)(0.143511)e^{-0.143511x}(1-e^{-0.143511x})^{5.108560-1}}{1-[(1-e^{-0.143511x})^{5.108560}]}, \quad (3.23)$$

Berdasarkan persamaan (3.23) di atas dapat diketahui grafik *hazard rate* seperti berikut:



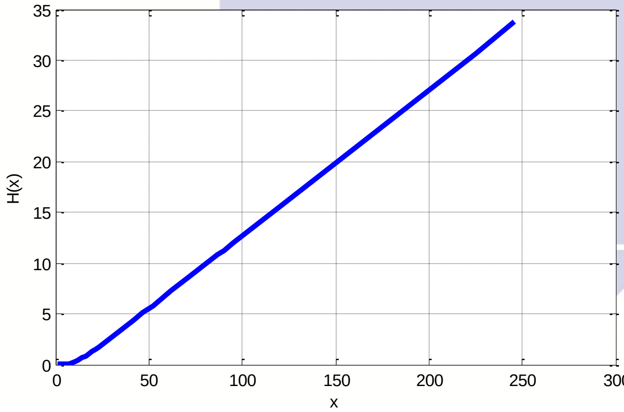
Gambar 3.2 Grafik *hazard rate* atau tingkat kegagalan distribusi eksponensial yang dipangkatkan untuk data masa hidup pendingin pesawat.

Berdasarkan Gambar 3.2, terlihat bahwa *hazard rate* atau tingkat kegagalan merupakan fungsi yang semakin meningkat untuk waktu yang semakin lama dan pada saat-saat tertentu mengalami kekonstanan yang kemudian semakin meningkat. Tingkat kegagalan untuk pendingin pesawat semakin meningkat sampai pendingin pesawat tidak dapat berfungsi lagi.

Kumulatif tingkat kegagalan (*hazard rate cumulative*) diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter $\hat{\beta} = 0.143511$ dan $\hat{\alpha} = 5.108560$ pada persamaan (3.5), sehingga:

$$H(x) = -In[1-(1-e^{-0.143511x})^{5.108560}] \quad (3.24)$$

Grafik kumulatif tingkat kegagalan dari persamaan (3.24) seperti berikut :



Gambar 3.3 Grafik kumulatif tingkat kegagalan distribusi eksponensial yang dipangkatkan untuk data masa hidup pendingin pesawat.

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa kumulatif tingkat kegagalan distribusi eksponensial yang dipangkatkan untuk data masa hidup pendingin pesawat merupakan fungsi yang semakin meningkat untuk waktu yang semakin lama.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, diperole kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter dari distribusi eksponensial yang dipangkatkan dan distribusi campuran eksponensial dengan menggunakan estimasi maksimum Likelihood.
   a. Distribusi eksponensial yang dipangkatkan secara analisis adalah:

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} In\left[1 - e^{-\hat{\beta}x_i}\right]}$$

dan

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i - (\hat{\alpha} - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{-\hat{\beta}x_i}}\left(x_i e^{-\hat{\beta}x_i}\right)}$$

Estimasi parameter distribusi eksponensial yang dipangkatkan secara numerik telah diperoleh dengan menggunakan metode Newton Raphson pada Matlab R2010a untuk kasus data masa hidup pendingin pesawat, yaitu $\hat{\beta} = 0.143511$dan $\hat{\alpha} = 5.108560$

   a) Distribusi eksponensial campuran hanya secara analisis, yaitu:

Dua proporsi

$$\hat{p}_1 = \frac{r_1}{n}$$

dan

$$\hat{p}_2 = 1 - \frac{r_1}{n}$$

Dua parameter skala

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_1}{\sum_{j=1}^{r_1} x_{1j}}$$

dan

$$\hat{\beta}_2 = \frac{r_2}{\sum_{j=1}^{r_2} x_{2j}}$$

2. Contoh perhitungan numerik estimasi parameter distribusi eksponensial yang dipengkatkan diperoleh nilai estimasi$\hat{\beta} = 0.143511$dan$\hat{\alpha} = 5.108560$, artinya bahwa reliabilitas atau keandalan dari pendingin pesawat akan melaksanakan fungsi yang diharapkan untuk periode waktu yang lama

dengan nilai tahan hidup yang semakin kecil. *Hazard rate* atau tingkat kegagalan merupakan fungsi yang semakin meningkat untuk waktu yang lama dan pada saat-saat tertentucenderungkonstanyang kemudian semakin meningkat. Dan kumulatif tingkat kegagalan distribusi eksponensial yang dipangkatkan untuk data masa hidup pendingin pesawat merupakan fungsi yang semakin meningkat untuk waktu yang semakin lama.

Referensi

[1] Al-Husaini, Assam K., dan Mohamed Hussein, *Estimation under a finite mixture of exponentiated exponential components model and balanced square error loss*, Journal of Statistics, 28-38, 2012.

[2] Guptu, Rameshwar D., Kundu Debasis, *Closeness of gamma and generalized exponential distribution,* Comm. Statist.- Theory Methods, 705-721, 1999

[3] Kencana, Ami Garmi, *Estimasi Parameter Distribusi Weibull yang Diperluas untuk Data Masa Hidup*, Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung: 2012.

[4] Kundu dan Gupta, *Exponentiated Exponential Family : An Alternative To Gamma and Weibull Distribution,* Biometrical Journal, 117-130, 2001

[5] repositori.use.ad.id/bitstream/123456789/27694/4/chapter%20I (Diakses pada tanggal 9 mei 2012, pukul 08:12)

[6] Saifudin, Toha, *Pendekatan Terbaikdiantaradistribusipareto, paretotergeneralisirdanmixture paretodalampemodelanreliabilitas,*Jurnal Ilmu Dasar, **7(2)** : 146-154, 2006.

[7] Santiyasa, I Wayan, *Algoritma Newton Raphson dengan fungsi non linear*, Program Studi Teknik Informatika, Jurusan Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana.

[8] http://ejournal.unud.ac.id/abstrak/2.%20materi%20jurnal.pdf (Diakses pada tanggal 10 November 2012, pukul 01:28)

[9] Solih, A. Asep *Estimasi Parameter Distribusi Campuran Weibull Berhingga dengan Algoritma EM,* Tesis, Program Studi Matematika, ITB, Bandung: 2006.

[10] Walpole, Ronald E. dan Raymond H.Myers, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insyinyur dan Ilmuwanedisi 4*, Terjemah, Penerbit ITB, Bandung: 1995.