Syarat Regularitas dan Eulerian Graf Unit dari Ring $\mathbb{Z}_n$

Vika Yugi Kurniawan[1, a] dan Lailatul Chairul Nisa [1,b]

[1]*Universitas Sebelas Maret*

[a)]*email: vikayugi@staff.uns.ac.id*
[b)] *email: nisalailatul224@student.uns.ac.id*

Abstrak

Misalkan $\mathbb{Z}_n$ adalah ring bilangan bulat modulo n dan $U(\mathbb{Z}_n)$ menyatakan himpunan semua elemen unit dari ring $\mathbb{Z}_n$. Graf unit dari $\mathbb{Z}_n$ yang dinotasikan dengan $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah graf sederhana yang himpunan *vertex*-nya adalah semua elemen $\mathbb{Z}_n$, dimana dua *vertex* berbeda x dan y terhubung oleh sebuah *edge* jika dan hanya jika $x + y$ adalah elemen unit di $\mathbb{Z}_n$. Pada artikel ini dikaji syarat regularitas dan eulerian dari graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$. Hasil dari pengkajian tersebut diperoleh bahwa $G(\mathbb{Z}_n)$ merupakan graf *Euler* jika $n \geq 4$ dengan n genap dan $G(\mathbb{Z}_n)$ merupakan graf regular jika n genap.

Kata kunci: graf unit, degree, graf Euler, graf regular

Abstract

Let $\mathbb{Z}_n$ be a ring of integers modulo n and $U(\mathbb{Z}_n)$ denote the set of all unit elements of the ring $\mathbb{Z}_n$. The unit graph of $\mathbb{Z}_n$ which is denoted by $G(\mathbb{Z}_n)$ is a simple graph, where the vertices of $G(\mathbb{Z}_n)$ are all elements of $\mathbb{Z}_n$, where two different vertices x and y are connected by an *edge* if and only if $x + y$ is the unit of $\mathbb{Z}_n$. In this article, we will examine the properties of the unit graph of the ring $\mathbb{Z}_n$. The results of this study show that $G(\mathbb{Z}_n)$ is an *Euler* graph if $n \geq 4$ where n is even, and $G(\mathbb{Z}_n)$ is a regular graph if n is even.

Keywords: unit graph, degree, Eulerian graph, regular graph

Pendahuluan

Teori graf, sebuah cabang ilmu matematika, memiliki peran penting dalam menyederhanakan berbagai masalah dengan menyajikan representasi visual dari hubungan dan struktur objek. Graf dapat digunakan untuk memodelkan masalah-masalah yang berkaitan dengan sistem transportasi, jaringan telekomunikasi, dan struktur kimia, memungkinkan pemahaman yang lebih baik terhadap kompleksitas dan interkoneksi elemen-elemen tersebut. Selain itu, teori graf tidak hanya berguna untuk merepresentasikan hubungan antar objek dalam konteks aplikatif, tetapi juga memiliki aplikasi di dalam cabang-cabang ilmu matematika lainnya. Misalnya, dalam menganalisis sifat-sifat struktur aljabar, teori graf dapat digunakan untuk menggambarkan elemen-elemen dan keterkaitannya dalam bentuk graf, membantu peneliti memahami lebih dalam dan mengungkap karakteristik esensial dari suatu struktur matematika. Dengan demikian, teori graf bukan hanya alat bantu visual, tetapi juga instrumen analitis yang kuat dalam memecahkan dan memahami berbagai permasalahan matematika dan non-matematika.

Penelitian yang menghubungkan teori graf dengan teori ring maupun struktur aljabar lainnya banyak dipelajari selama beberapa dekade terakhir. Penelitian pertama yang menghubungkan graf dengan suatu ring diperkenalkan oleh Beck [1] pada tahun 1988, yang merumuskan graf pembagi nol dari ring komutatif. Konsep awal ini kemudian diperluas oleh Anderson dan Livingston [2], yang mendefinisikan ulang graf pembagi nol dengan menyajikan graf tak berarah, di mana vertex-vertexnya adalah semua pembagi nol dari ring, dan dua vertex terhubung jika perkalian dari kedua vertex tersebut sama dengan nol. Selanjutnya, banyak peneliti yang mengkaji konsep graf yang terkait struktur aljabar seperti yang terlihat dalam penelitian-penelitian [3], [4], [5], dan [6].

Pada tahun 2010, Ashrafi *et al.* [7] memperkenalkan graf unit dari ring R. Pada tahun 2014, Su dan Zhou [8] mengkaji ke lingkaran graf unit dari ring R. Kemudian Su dan Wei [9] pada tahun 2019, menjelaskan bahwa elemen unit dari suatu ring menjadi elemen kunci dalam menentukan berbagai sifatnya. Jika diketahui R adalah ring dengan identitas, graf unit dari ring R dinotasikan dengan $G(R)$ didefinisikan sebagai graf sederhana yang himpunan *vertex*-nya adalah semua elemen dari R. Dua *vertex* berbeda x, y di $G(R)$ terhubung oleh *edge* jika dan hanya jika $x + y$ adalah suatu elemen unit di R.

Pada artikel ini, penulis mengkaji tentang sifat-sifat graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$ terutama syarat regularitas dan eulerian. Penelitian ini menggunakan bantuan dari program *python* untuk mengkonstruksi graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$ guna mempersingkat waktu dan memudahkan dalam mengobservasi sifat-sifat yang berlaku pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$.

Metode

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal, atau tulisan yang terkait struktur aljabar dan teori graf, khususnya tentang graf unit dari suatu ring.

Terdapat beberapa definisi dan teorema yang mendasari penelitian ini meliputi pengertian dasar graf, konsep dasar ring, dan graf unit dari ring R. Menurut Chartrand [10], Graf G adalah suatu himpunan tak kosong berhingga V disertai dengan relasi yang *irreflexive, symmetric* pada V. Selanjutnya, $V(G)$ disebut himpunan *vertex* dan $E(G)$ adalah himpunan *edge* dalam graf G. Suatu graf G disebut graf regular jika setiap *vertex* memiliki *degree* yang sama. Sedangkan, suatu sirkuit C dalam suatu graf terhubung nontrivial G yang memuat seluruh *edge* dari G disebut sirkuit *Euler*. Suatu graf terhubung G yang memuat sirkuit *Euler* disebut graf *Euler*. Pada [11], Chartrand dan Zhang menjelaskan bahwa suatu graf terhubung G merupakan graf *Euler* jika dan hanya jika setiap *vertex* dari G memiliki *degree* genap.

Menurut Fraleigh [12], suatu Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ adalah himpunan R dengan dua operasi biner + dan $\cdot$ yang disebut dengan penjumlahan dan perkalian, didefinisikan pada R sehingga aksioma berikut dipenuhi :

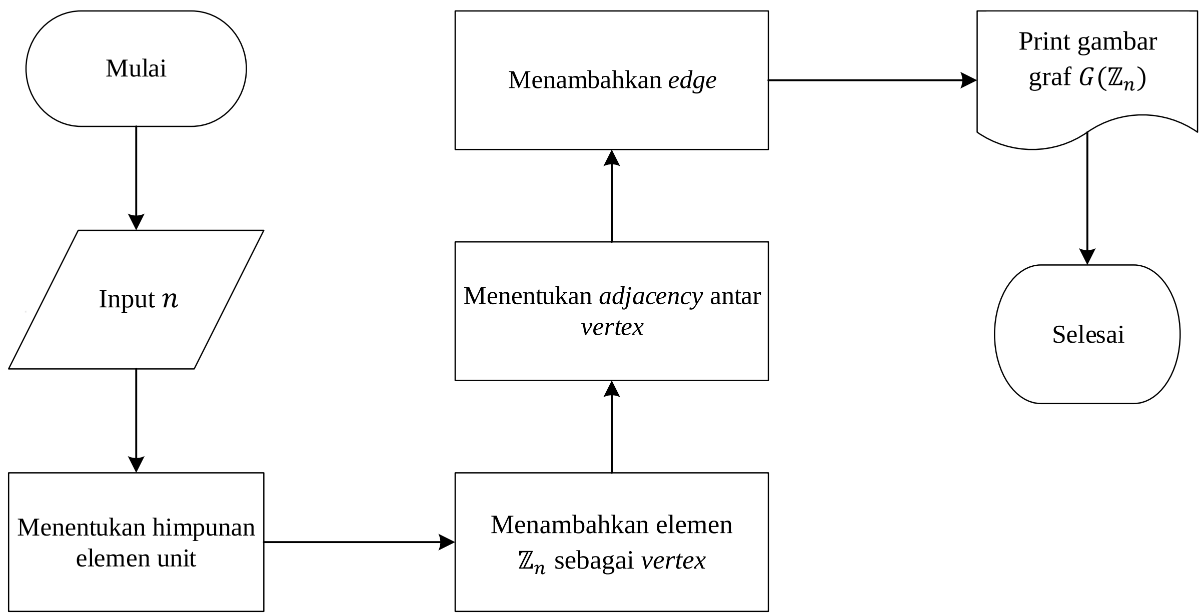
1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup abelian,
2. Operasi perkalian bersifat asosiatif,
3. Untuk semua $a, b, c \in R$, memenuhi sifat distribusi kiri, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, dan distribusi kanan, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Suatu elemen $u \in R$ disebut unit (elemen yang memiliki invers) jika terdapat $v \in R$ sehingga $uv = 1 = vu$. Misalkan n bilangan bulat positif. Mengacu dari Rosen[13], Fungsi *phi Euler* $\phi(n)$ didefinisikan sebagai banyaknya bilangan asli yang tidak lebih dari n yang saling prima dengan n. Fungsi *phi Euler* ini penting untuk menghitung banyaknya elemen unit pada ring $\mathbb{Z}_n$.

Program *python* menurut Lutz[14] adalah bahasa pemrograman multiguna dengan sistem *open source* dan interpretatif yang memiliki kode-kode pemrograman sangat jelas, lengkap, dan mudah dipahami. Program *python* dalam penelitian ini, digunakan untuk mempersingkat waktu dalam penyusunan konstruksi $G(\mathbb{Z}_n)$, kemudian *output*-nya digunakan untuk menentukan sifat-sifat dari $G(\mathbb{Z}_n)$.

Hasil dan Diskusi

Sebelum menyusun program untuk mengkonstruksi graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$, perlu disusun algoritma terlebih dahulu. Dengan memahami definisi graf unit dari ring, dapat disusun suatu algoritma untuk mengkonstruksi graf unit dari ring $\mathbb{Z}_n$. Alur proses algoritma yang sudah disusun digambarkan dalam bentuk *flowchart* seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. *Flowchart* algoritma konstruksi $G(\mathbb{Z}_n)$

Dari algoritma tersebut selanjutnya dapat disusun suatu program untuk mengkonstruksi graf unit dengan menggunakan bahasa pemrograman *python*. Berikut gambaran program konstruksi graf $G(\mathbb{Z}_n)$.

Program Konstruksi_G(Zn)

Require: $n \geq 0$

Import library network dan mathplotlib.pyplot

Step 1 :

for $a, b \in \mathbb{Z}_n$ **do**

  if $ab = 1 = ba$ **then**

    add a, b to $U(\mathbb{Z}_n)$

  end if;

end for;

Step 2 :

for $i, j \in \mathbb{Z}_n$ **do**

add i ***to*** $V\big(G(\mathbb{Z}_n)\big)$;
if $i + j \in U(\mathbb{Z}_n)$ **then**
add $i \sim j$ to $E\big(G(\mathbb{Z}_n)\big)$;
end if;
end for;
Step 3:
Draw $G(\mathbb{Z}_n)$;
end;

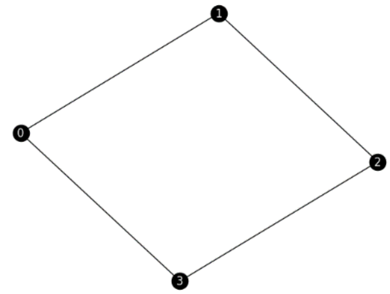
Untuk menjalankan *syntax* program di atas, diperlukan terlebih dahulu meng*import* paket *network* dan *matplotlib.pyplot* pada *python*.

Berikut penjelasan langkah berjalannya program konstruksi graf unit pada ring $\mathbb{Z}_n$. Pertama, *import* paket *library python* yang digunakan untuk menggambar graf. Pada langkah 1 ini, program mengecek dengan proses *looping* untuk setiap elemen $a, b \in \mathbb{Z}_n$, jika $ab = 1 = ba$ maka a, b merupakan elemen unit dan dimasukkan ke himpunan $U(\mathbb{Z}_n)$. Jika $ab \neq 1 \neq ba$, maka kembali ke proses *looping* pada langkah 1. Kemudian, pada langkah 2 untuk setiap elemen $i, j \in \mathbb{Z}_n$, i dan j ditambahkan ke himpunan $V\big(G(\mathbb{Z}_n)\big)$. Lalu, jika $i + j \in U(\mathbb{Z}_n)$ maka tambahkan *edge* antara i dan j. Jika tidak, kembali ke proses *looping* pada langkah 2. Langkah terakhir, menggambar graf $G(\mathbb{Z}_n)$ dengan elemen *vertex* dan *edge* yang diperoleh dari langkah sebelumnya.

Sebagai contoh, diberikan contoh *output* visual program konstruksi graf unit pada ring $\mathbb{Z}_4$. Diberikan $\mathbb{Z}_4$, sehingga input nilai $n = 4$. Langkah 1, program mengecek dengan proses *looping* untuk setiap elemen $a, b \in \mathbb{Z}_4$, jika $ab = 1 = ba$ maka a, b merupakan elemen unit dan dimasukkan ke himpunan $U(\mathbb{Z}_4)$, diperoleh $U(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$. Jika $ab \neq 1 \neq ba$, maka kembali ke proses *looping* pada langkah 1. Kemudian, pada langkah 2 untuk setiap elemen $i, j \in \mathbb{Z}_4$, i dan j ditambahkan ke himpunan $V\big(G(\mathbb{Z}_4)\big)$, diperoleh $V\big(G(\mathbb{Z}_4)\big) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Lalu, jika $i + j \in U(\mathbb{Z}_4)$ maka tambahkan *edge* antara i dan j. Jika tidak, kembali ke proses *looping* pada langkah 2.

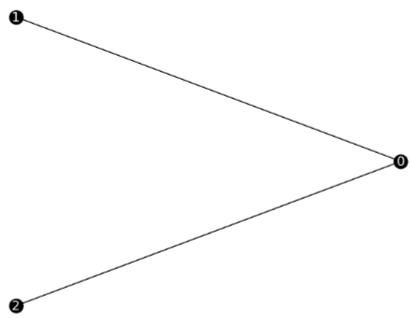
Ditemukan pada $i = 0$ dan $j = 1$, dengan $i + j = 1 \in U(\mathbb{Z}_4)$, maka ditambah *edge* antara $\bar{0}$ dan $\bar{1}$. Kembali ke proses *looping,* ditemukan pada $i = 1$ dan $j = 2$, dengan $i + j = 3 \in U(\mathbb{Z}_4)$, maka ditambah *edge* antara $\bar{1}$ dan $\bar{2}$. Kemudian kembali ke proses *looping,* ditemukan pada $i = 2$ dan $j = 3$, dengan $i + j = 1 \in U(\mathbb{Z}_4)$, maka ditambah *edge* antara $\bar{2}$ dan $\bar{3}$. Kembali ke proses *looping,* ditemukan ada $i = 3$ dan $j = 0$, dengan $i + j = 3 \in U(\mathbb{Z}_4)$, maka ditambah *edge* antara $\bar{3}$ dan $\bar{0}$. Kembali ke proses *looping* pada langkah 2, tidak ditemukan lagi i, j yang memenuhi hingga proses *looping* selesai. Maka dapat dilanjutkan ke langkah 3.

Pada langkah terakhir ini, program menggambarkan $G(\mathbb{Z}_4)$ berdasarkan elemen *vertex* dan *edge* yang diperoleh dari langkah sebelumnya. Berikut hasil visual $G(\mathbb{Z}_4)$ yang ditunjukkan oleh Gambar 2.

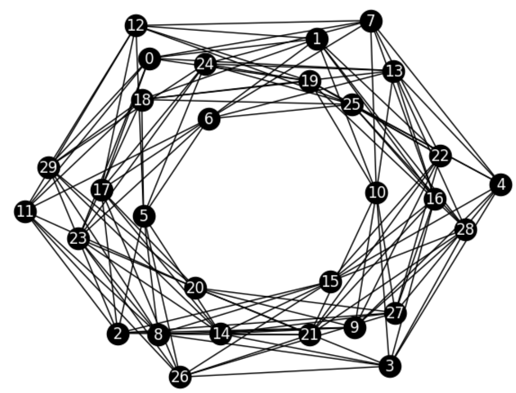


Gambar 2. Graf $G(\mathbb{Z}_4)$

Sebagai ilustrasi lain, pada Gambar 3 dan Gambar 4 berikut diberikan output dari program konstruksi graf $G(\mathbb{Z}_n)$ untuk $n = 3$ dan $n = 30$ yang diperoleh dengan waktu proses yang sangat cepat hanya dalam hitungan beberapa detik.



Gambar 3. Graf $G(\mathbb{Z}_3)$



Gambar 4. Graf $G(\mathbb{Z}_{30})$

Berdasarkan konstruksi graf yang telah dibentuk dengan program *python* diperoleh hasil terkait sifat-sifat $G(\mathbb{Z}_n)$. Pertama, berikut diberikan lema yang menjelaskan syarat agar setiap *vertex* pada graf $G(\mathbb{Z}_n)$ selalu memiliki *degree* genap.

Lema 1. *Diberikan ring $\mathbb{Z}_n$. Jika n genap dan $n \geq 4$, maka setiap vertex di $G(\mathbb{Z}_n)$ selalu* memiliki *degree genap.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa setiap *vertex* di $G(\mathbb{Z}_n)$ dengan n genap dan $n \geq 4$ memiliki *degree* genap. Berdasarkan definisi *phi Euler* yang merupakan banyaknya bilangan asli tidak lebih dari n yang saling prima dengan n, maka dapat ditentukan banyaknya elemen yang memiliki elemen invers terhadap perkalian di $\mathbb{Z}_n$. Diambil sebarang bilangan genap n dengan $n \geq 4$. Berikutnya ditentukan banyaknya bilangan unit yang terdapat di $\mathbb{Z}_n$ dengan menggunakan fungsi *phi Euler*. Dengan menggunakan rumus fungsi *phi Euler*, karena n genap, maka n terbagi dalam 2 kasus yaitu $n = 2^k$ atau $n = 2^k \prod_{i=1}^{k_i} p_i^{k_i}$ dengan p_i adalah bilangan-bilangan prima ganjil, sedangkan pangkat k^i adalah bilangan asli.

i. untuk $n = 2^k$, diperoleh

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(2^k) \\ &= (2^{k-1})(2-1) \end{aligned}$$

$= (2^{k-1})1$, bilangan bulat genap karena untuk $n \geq 4$ maka $k \geq 2$.

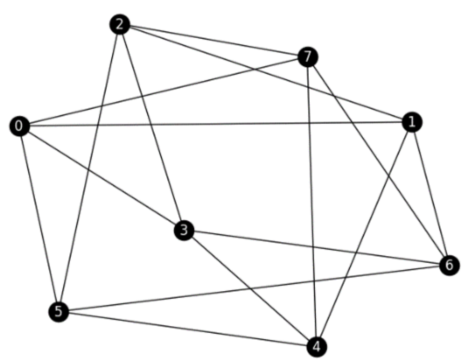
ii. untuk $n = 2^k \prod_{i=1}^{k_i} p_i^{k_i}$, dengan p_i merupakan bilangan prima ganjil, diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi\left((2^k)\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}\right)\right)\\ &= \phi(2^k)\phi(p_1^{k_1})\phi(p_2^{k_2}) \dots \phi(p_n^{k_n})\\ &= (2^{k-1})(2-1)(p_1^{k_1-1})(p_1-1)(p_2^{k_2-1})(p_2-1) \dots (p_n^{k_n-1})(p_n-1)\end{aligned}$$

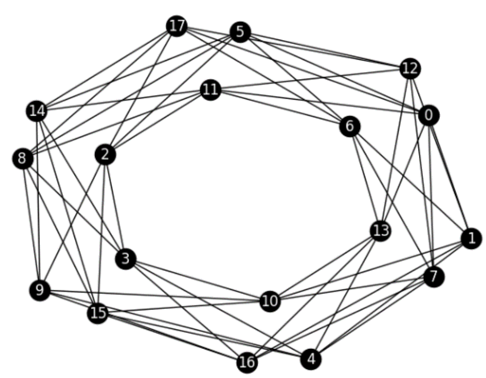
Jika $k \geq 2$ maka (2^{k-1}) genap. Jika $k = 1$, maka terdapat suatu i sehingga $p_i - 1$ genap. Dengan demikian $\phi(n)$ pasti bilangan genap.

Dari kedua kasus tersebut, nilai fungsi *phi Euler* yang digunakan untuk menentukan banyaknya unit di $\mathbb{Z}_n$ selalu menghasilkan bilangan genap. Himpunan *vertex* di $\mathbb{Z}_n$ dapat dibagi dalam dua himpunan yaitu elemen-elemen yang saling prima dengan n yang juga merupakan elemen unit dan elemen-elemen yang tidak relatif prima dengan n yang sekaligus menjadi elemen pembagi nol dan pastinya bukan unit. Jika n ganjil, maka vertex 0 dan vertex-vertex bukan unit (faktor dari n) memiliki *degree* lebih banyak karena vertex-vertex tersebut pasti selalu *adjacent* dengan semua vertex unit (elemen unit) mengingat syarat dua vertex u, v *adjacent* jika $u + v \in U(Z_n)$. Sedangkan vertex unit tidak selalu *adjacent* dengan vertex unit lainnya, yaitu ketika jumlahan keduanya bukan unit. Tetapi jika n genap, maka setiap vertex akan memiliki sebanyak $|U(Z_n)|$ pasangan yang jumlahnya menghasilkan suatu unit sehingga *degree* dari setiap vertexnya pasti sebanyak elemen unitnya. Dengan demikian terbukti bahwa setiap *vertex* di graf unit $\mathbb{Z}_n$ dengan n genap dan $n \geq 4$ selalu memiliki *degree* genap. ■

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$ dengan elemen unit $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ sebagai contoh penerapan dari kasus 1 ditunjukkan oleh Gambar 5. Kemudian ring $\mathbb{Z}_{18}$ dengan elemen unit $U(\mathbb{Z}_{18}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$ sebagai contoh penerapan kasus 2 ditunjukkan oleh Gambar 6.



Gambar 5. Graf $G(\mathbb{Z}_8)$



Gambar 6. Graf $G(\mathbb{Z}_{18})$

Teorema 1. *Diberikan ring $\mathbb{Z}_n$. Jika n genap, maka $G(\mathbb{Z}_n)$ graf regular.*

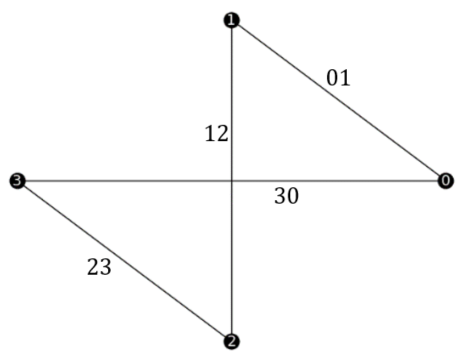
Bukti. Berdasarkan definisi, graf regular merupakan graf yang setiap *vertex*-nya memiliki degree sama. Jika $n = 2$, maka terbentuk graf dengan dua *vertex* 0 dan 1 yang saling *adjacent.* Kedua *vertex* saling *adjacent* karena $0 + 1 = 1 \in U(\mathbb{Z}_2)$ sehingga masing-masing *vertex* memiliki *degree* 1. Karena itu $G(\mathbb{Z}_2)$ merupakan graf 1-regular. Jika $n \geq 4$, maka dengan Lema 1 diperoleh setiap *vertex* dari $G(\mathbb{Z}_n)$ memiliki degree yang sama yaitu sebanyak elemen unit di $\mathbb{Z}_n$. ■

Teorema 1 yang menunjukkan bahwa graf unit $\mathbb{Z}_n$ merupakan graf regular. Sebagai ilustrasi, dapat dilihat contoh graf $G(\mathbb{Z}_8)$ seperti Gambar 5 yang setiap *vertex*-nya ber-*degree* 4.

Teorema 2. *Diberikan ring $\mathbb{Z}_n$.Jika n genap dan $n \geq 4$, maka $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah graf Euler.*
Bukti. Berdasarkan Lema 1, diketahui bahwa setiap *vertex* pada $G(\mathbb{Z}_n)$ dengan n *genap dan* $n \geq 4$ selalu memiliki *degree* genap. Oleh karena itu, dengan [11, Teorema 6.1], maka $G(\mathbb{Z}_n)$ dengan n genap dan $n \geq 4$ merupakan graf *Euler*. ■

Teorema 2 menjelaskan syarat agar suatu graf unit $\mathbb{Z}_n$ merupakan graf Euler.

Diberikan contoh $G(\mathbb{Z}_4)$ seperti pada Gambar 7 yang merupakan graf *Euler* karena memuat sirkuit *Euler*. Sirkuit *Euler* dari $G(\mathbb{Z}_4)$ yaitu $01 - 12 - 23 - 30$.



Gambar 7. Graf $G(\mathbb{Z}_4)$

Kesimpulan

Dengan menggunakan program python untuk mengkonstruksi $G(\mathbb{Z}_n)$, pengamatan sifat-sifat yang berlaku pada $G(\mathbb{Z}_n)$ dapat dilakukan dengan lebih cepat. Dari pengamatan tersebut diperoleh beberapa sifat dari $G(\mathbb{Z}_n)$ antara lain, jika $n \geq 4$ dengan n genap maka setiap *vertex* pada $G(\mathbb{Z}_n)$ selalu memiliki *degree* genap sehingga merupakan graf *Euler*, dan jika n genap maka $G(\mathbb{Z}_n)$ merupakan graf regular.

Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan terimakasih kepada LPPM Universitas Sebelas Maret yang telah mendanai penelitian ini melalui Hibah Grup Riset Tahun Anggaran 2024, serta semua instansi maupun perorangan yang telah memberikan dukungan selama pelaksanaan penelitian dan penulisan makalah.

Referensi

[1] I. Beck, “Coloring of Commutative Ring”, Journal of Algebra, Vol. 116, No. 1, pp. 208-226, 1988
[2] D.F. Anderson and P.S. Livingston, “The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring”, Journal of Algebra, 217, pp. 434-447, 1999

[3] S.E. Atani, S.D.P. Hesari, and M. Khoramdel, “Total graph of a commutative semiring with respect to identity-summand elements, J. Korean Math. Soc. 51 no. 3, 593–607, 2014
[4] M.R. Ashidiqi, V.Y. Kurniawan, and P.H. Utomo, “Graf Annihilator dari Ring Komutatif”. Prosiding KNPMP V UMS (2020), 5 Agustus, Sukoharjo, Indonesia, pp.293-302
[5] Celikel, E.C., “Triple Zero Graph of Commutative Ring”, Communications Faculty of Sciences University of Ankara, Series A1 Mathematics and Statistics, Vol. 70(2), pp: 653-663, 2021
[6] O. Putri, dan V.Y. Kurniawan, “Keterhubungan Graf Pembagi Tak Nol dari Ring”, KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika, Vol. 8(2) : 149-158, 2023
[7] Ashrafi, N., Maimani, H.R., Pournaki, M.R. and Yassemi, S., Unit graphs associated with rings, Communications in Algebra®, 38(8), 2851-2871, 2010.
[8] Su, H. and Zhou, Y., On the girth of the unit graph of a ring, Journal of Algebra and Its Applications, 13(02), 1350082, 2014.
[9] Su, H. and Wei, Y., The diameter of unit graphs of rings, Taiwanese Journal of Mathematics, 23(1), 1-10, 2019.
[10] G. Chartrand, Introductory graph theory, Courier Corporation, 1977.
[11] G. Chartrand and P. Zhang , A first course in graph theory. Courier Corporation., 2013.
[12] J. B. Fraleigh, A first course in abstract algebra, Pearson Education India, 2003.
[13] K. H.Rosen. 2005. Elementary Number Theory And Its Application Fifth Edition. AT&T Laboratories: United States of America
[14] Lutz, M., Programming python, O’Reilly Media, Inc., 2001.