

Analisis Kestabilan Ekuilibrium dan Eksistensi Solusi Periodik Pada Model Mangsa Pemangsa Dengan Penyebaran Penyakit

Dani Suandi^{1, a)}, Fadilah illahi^{2, b)} dan Erna Putri Utami^{2, c)}

¹Politeknik Piksi Ganesha, Bandung

²Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Bandung

^{a)}email: danisuandi.math@gmail.com

^{b)} email: fadilah.ilahi@uinsgd.ac.id

^{c)}email: ernaputriutami28@gmail.com

Abstrak

Model matematika mangsa pemangsa (*predator-prey*) dimodifikasi pada artikel ini. Modifikasi dilakukan dengan melibatkan penyebaran penyakit dan tingkat kekebalan pada kompartemen pemangsa. Analisis kestabilan lokal dilakukan dengan melihat nilai eigen dari matriks Jacobi. Sementara itu, Kriteria Dulac-Bendixon digunakan sebagai metode dalam menganalisis eksistensi solusi periodik. Berdasarkan hasil analisis, solusi periodik dapat terjadi pada model tersebut. Simulasi numerik disajikan sebagai konfirmasi dari hasil analisis.

Kata kunci: Solusi periodik, kriteria Dulac-Bendixon, kestabilan ekuilibrium.

Abstract

Predator-prey mathematical model is modified in this article. Modifications are carried out by involving the spread of disease and the level of immunity in the predator compartment. Local stability analysis was carried out by looking at the eigenvalues of the Jacobi matrix. Meanwhile, the Dulac-Bendixon Criteria are used as a method in analyzing the existence of periodic solutions. Based on the results of periodic solutions analysis can occur on the model. Numerical simulations are presented as confirmation of the results of the analysis.

Keywords: Periodic solution, Dulac-Bendixon criteria, stability of equilibria.

Pendahuluan

Interaksi antar spesies yang terjadi dalam suatu ekosistem dapat menyebabkan dinamika populasi. Interaksi tersebut dapat memberikan pengaruh positif, negatif atau bahkan tidak berpengaruh sama sekali terhadap spesies-spesies yang berinteraksi pada suatu ekosistem. Salah satu bentuk interaksi adalah pemangsaan. Secara umum model pemangsaan merujuk pada model Lotka-Volterra [1].

Banyak peneliti yang tertarik untuk meneliti tentang bagaimana efek penyakit dalam sistem mangsa pemangsa. Kooi, dkk. [2] telah meneliti model mangsa pemangsa dua spesies, dengan penyakit hanya terjadi pada populasi pemangsa [1]. Model mangsa pemangsa dengan infeksi parasit yang

menyebarkan hanya pada populasi pemangsa dalam bentuk SIS (Susceptible Infected Susceptible) juga telah dikaji oleh Haque [3].

Selain penyakit, pemanenan secara signifikan dapat mempengaruhi dinamika sistem mangsa pemangsa. Pemanenan tidak hanya dapat menurunkan populasi mangsa atau pemangsa [4] tetapi juga dapat dianggap sebagai faktor penstabil [5], faktor destabilisasi [6] atau bahkan menyebabkan perilaku berosilasi [7]. Bairagi dkk. [8] telah mempelajari efek gabungan dari pemanenan dan penyakit pada mangsa dalam model mangsa pemangsa. Mereka menunjukkan bahwa pemanenan dapat mengendalikan penyebaran penyakit pada subpopulasi mangsa. Di sisi lain, Cheve dkk. [9] memasukkan faktor pemanenan dan penyebaran penyakit pada pemangsa dalam model mangsa pemangsa dan menyimpulkan bahwa pemanenan dapat mencegah penyebaran penyakit menular, sehingga ketahanan dan stabilitas sistem ekologi akan aman [10].

Interaksi antara mangsa dan pemangsa dapat mengurangi populasi mangsa. Namun, mangsa dapat menghindari pemangsa dengan beberapa strategi, misalnya dengan kemampuan mangsa untuk berlindung dari pemangsa sehingga faktor ini dapat mencegah kepunahan pada mangsa. Dalam hal ini, Wuhaib dan Hasan telah melibatkan kemampuan mangsa untuk berlindung dari pemangsa yang dideskripsikan dalam model Cheve, dkk. [9]. Mereka menyimpulkan bahwa faktor perlindungan mangsa dapat memastikan kesinambungan dan keberlanjutan semua populasi dan juga dapat berperan sebagai kontrol dalam penyakit menular. Kemudian, Trisdiani, dkk [10] memodifikasi model Wuhaib dan Hasan dengan melibatkan faktor pemanenan pada pemangsa yang rentan berupa fungsi respon Holling tipe II. Mereka menunjukkan bahwa pemanenan pada pemangsa yang rentan dapat menjaga koeksistensi pada ekosistem, sedangkan pemanenan pada pemangsa tertular dapat digunakan sebagai upaya pengendalian biologis dalam mencegah penyebaran penyakit [11].

Pada artikel ini, model dimodifikasi dengan melibatkan faktor kekebalan pada pemangsa rentan sebagai peluang kegagalan dalam penularan penyakit yang dilakukan pemangsa tertular kepada pemangsa rentan. Selain itu, dilibatkan pula aspek pemanenan pada pemangsa.

Metode

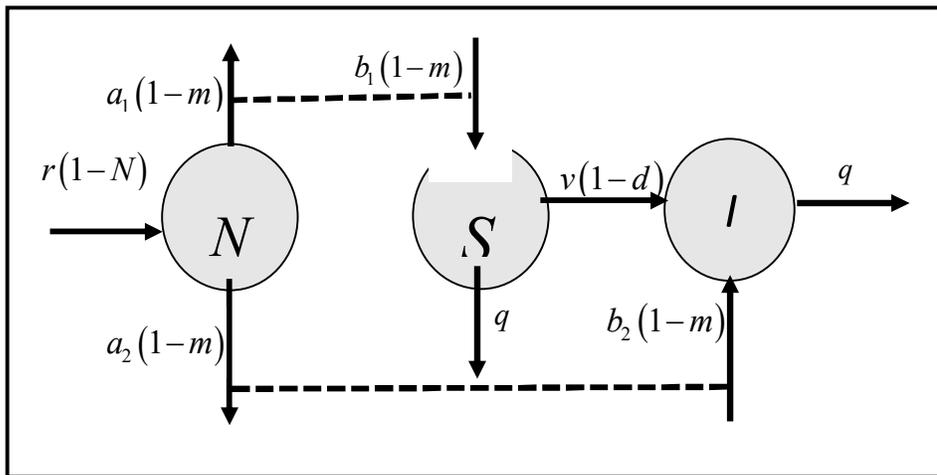
Penelitian dilakukan dengan tahapan sebagai berikut: 1) Studi literatur mengenai model mangsa pemangsa. 2) Konstruksi dan modifikasi model matematika mangsa pemangsa. Pada tahap ini model matematika dimodifikasi dengan melibatkan penyebaran penyakit dan tingkat kekebalan pada populasi pemangsa. 3) Analisis model matematika. Pada tahapan ini analisis eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium dilakukan. Selain itu, dianalisis pula eksistensi solusi periodik dengan menggunakan metode Dulac-Bendixson. 4) Simulasi numerik dan interpretasi. Pada tahap ini simulasi numerik dilakukan menggunakan software maple dan kemudian hasilnya diinterpretasikan.

Hasil dan Diskusi

Model Matematika

Pada model mangsa pemangsa yang dikaji ini terdapat tiga spesies yaitu mangsa, pemangsa rentan, dan pemangsa tertular. Dalam konstruksi model matematika ini digunakan notasi N untuk mangsa, S untuk pemangsa rentan dan I untuk pemangsa tertular. Model ini menggambarkan dinamika populasi dari ketiga spesies tersebut yang saling berinteraksi. Pada spesies pemangsa terdapat

penularan penyakit serta faktor pemanenan. Faktor kemampuan berlindung mangsa dari pemangsa disertakan pula pada model yang dapat mengurangi laju pemangsaan. Tingkat kekebalan pada spesies pemangsa rentan yang merupakan peluang gagal penularan penyakit oleh pemangsa tertular saat melakukan kontak dengan pemangsa rentan dilibatkan pada model yang dapat mengurangi laju penyebaran penyakit pada pemangsa rentan. Diagram kompartemen interaksi mangsa dengan pemangsa yang terdapat penyebaran penyakit tersebut digambarkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Interaksi Mangsa dengan Pemangsa yang terdapat Penyebaran Penyakit dan Kekabalan pada Pemangsa

Dari Gambar 1, diperoleh model matematika untuk penyebaran penyakit pada pemangsa dengan tingkat kekebalan pemangsa dan faktor kemampuan berlindung pada mangsa adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN(1-N) - N(1-m)(a_1S + a_2I) \\ \frac{dS}{dt} &= b_1(1-m)NS - qS - v(1-d)SI \\ \frac{dI}{dt} &= b_2(1-m)NI - qI + v(1-d)SI\end{aligned}\quad (1)$$

dengan r adalah laju pertumbuhan intrinsik mangsa, m tingkat kemampuan berlindung pada mangsa, a_1 laju pemangsaan oleh individu rentan, a_2 laju pemangsaan oleh individu terinfeksi, b_1 biomass pemangsaan oleh individu rentan, b_2 biomass pemangsaan oleh individu terinfeksi, q tingkat pemanenan pada pemangsa, v laju infeksi pada pemangsa dan d tingkat kekebalan pada pemangsa rentan.

Hasil Analisis

Dengan menyelesaikan persamaan (1) untuk $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ diperoleh lima titik ekuilibrium.

1) Titik kepunahan populasi $E_1 = (0, 0, 0)$. 2) Titik kepunahan pemangsa $E_2 = (1, 0, 0)$. 3) Titik

kepunahan pemangsa rentan $E_3 = \left(\frac{q}{b_2(1-m)}, 0, \frac{r(b_2(1-m)-q)}{a_2b_2(1-m)^2} \right)$ dengan syarat eksistensi

$b_2(1-m) > q$. 4) Titik kepunahan pemangsa terinfeksi $E_4 = \left(\frac{q}{b_1(1-m)}, \frac{r(b_1(1-m)-q)}{a_1b_1(1-m)^2}, 0 \right)$ dengan

syarat eksistensi $b_1(1-m) > q$. 5) Titik koeksistensi $E_5 = (N^*, S^*, I^*)$ dengan

$$N^* = \frac{(q(a_1 - a_2))(1-m) - rv(1-d)}{(a_1b_2 - a_2b_1)(1-m)^2 - rv(1-d)}$$

$$S^* = \frac{qrv(1-d) + (a_2q(b_1 - b_2))(1-m)^2 - b_2rv(1-d)(1-m)}{rv^2(1-d)^2 + (a_2b_1v - a_1b_2v)(1-d)(1-m)^2}$$

$$I^* = \frac{(a_1q(b_2 - b_1))(1-m)^2 + b_1rv(1-d)(1-m) - qrv(1-d)}{rv^2(1-d)^2 + (a_2b_1v - a_1b_2v)(1-m)^2}.$$

Analisis kestabilan titik ekuilibrium E_5 dilakukan secara numerik. Sedangkan analisis kestabilan titik ekuilibrium lainnya disajikan dalam teorema 1 sebagai berikut.

Toerema 1 Kestabilan ekuilibrium

- i. Titik kepunahan populasi E_1 selalu tidak stabil
- ii. Titik kepunahan pemangsa E_2 stabil secara asimtotik lokal jika $q > \max\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$ dan tidak stabil jika $q < \min\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$.
- iii. Jika $q < b_2(1-m) \frac{rv(1-d)}{rv(1-d) + (a_2b_1 - a_2b_2)(1-m)^2}$ maka titik ekuilibrium kepunahan pemangsa rentan E_3 stabil secara asimtotik lokal dan jika $q > b_2(1-m) \frac{rv(1-d)}{rv(1-d) + (a_2b_1 - a_2b_2)(1-m)^2}$ maka E_3 tidak stabil.
- iv. Jika $q > b_1(1-m) \frac{rv(1-d)}{rv(1-d) + (a_1b_1 - a_1b_2)(1-m)^2}$ maka titik ekuilibrium kepunahan pemangsa terinfeksi E_4 stabil secara asimtotik lokal dan jika $q < b_1(1-m) \frac{rv(1-d)}{rv(1-d) + (a_1b_1 - a_1b_2)(1-m)^2}$ maka E_4 tidak stabil.

Bukti

Untuk membuktikan bagian i-ii dari Teorema 1, kita dapat langsung melihat dari tanda nilai eigen dari matriks Jacobi yang diperoleh dari sistem persamaan (1). Matriks jacobian yang dievaluasi pada ekuilibrium E_1 dan E_2 secara berturut – turut adalah :

$$J_1 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix}, \text{ dan } J_2 = \begin{bmatrix} -r & -a_1(1-m) & -a_2(1-m) \\ 0 & b_1(1-m)-q & 0 \\ 0 & 0 & b_2(1-m)-q \end{bmatrix},$$

Dari matriks J_1 dapat diketahui secara langsung bahwa titik ekuilibrium E_1 selalu tidak stabil karena salah satu dari nilai eigen nya bertanda positif $\lambda_1 = r > 0$. Kestabilan titik ekuilibrium E_2 ditentukan oleh nilai eigen dari matrik Jacobi J_2 . Secara langsung, kita dapat melihat bahwa elemen diagonal matriks J_2 merupakan nilai eigen. Sehingga jika kondisi $q > \max\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$ terpenuhi, maka ketiga elemen diagonal J_2 bertanda negatif. Akibatnya titik ekuilibrium E_2 stabil secara asimtotik lokal. Namun ketika $q < \min\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$ terpenuhi, maka elemen diagonal kedua dan ketiga bernilai positif, akibatnya titik ekuilibrium E_2 tidak stabil saddle.

Sementara itu, untuk menentukan kestabilan E_3 dan E_4 , kita akan melihat akar-akar polinom karakteristik λ yang diperoleh dari persamaan $\det(J_3 - \lambda I) = 0$ dan $\det(J_4 - \lambda I) = 0$, dengan J_3 dan J_4 merupakan matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik ekuilibrium E_3 dan E_4 . Secara berturut-turut J_3 dan J_4 adalah :

$$J_3 = \begin{bmatrix} -\frac{rq}{b_2(1-m)} & \frac{a_1q}{b_2} & -\frac{a_2q}{b_2} \\ 0 & \frac{-b_2rv(1-d)(1-m) + qrv(1-d) + (a_2b_1q - a_2b_2q)(1-m)^2}{a_2b_2(1-m)^2} & 0 \\ -\frac{-b_2(1-m)r + qr}{a_2(1-m)} & \frac{b_2(1-d)(1-m)rv - (1-d)qrv}{a_2b_2(1-m)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$J_4 = \begin{bmatrix} -\frac{rq}{b_1(1-m)} & -\frac{a_1q}{b_1} & \frac{a_2q}{b_1} \\ -\frac{-b_1(1-m)r + qr}{a_1(1-m)} & 0 & \frac{-b_1(1-d)(1-m)rv + (1-d)qrv}{a_1b_1(1-m)^2} \\ 0 & 0 & \frac{b_1rv(1-d)(1-m) - qrv(1-d) + (-a_1b_1q + a_1b_2q)(1-m)^2}{a_1b_1(1-m)^2} \end{bmatrix}.$$

Polinom karakteristik tersebut secara berturut-turut adalah:

$$P_3(\lambda) := \left(\frac{-b_2rv(1-d)(1-m) + qrv(1-d) + (a_2b_1q - a_2b_2q)(1-m)^2}{a_2b_2(1-m)^2} - \lambda \right) M_{22} = 0, \text{ dan}$$

$$P_4(\lambda) := \left(\frac{b_1rv(1-d)(1-m) - qrv(1-d) + (-a_1b_1q + a_1b_2q)(1-m)^2}{a_1b_1(1-m)^2} - \lambda \right) M_{33} = 0$$

dengan M_{22} merupakan determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-2 dan kolom ke-2 dihilangkan dari $(J_3 - \lambda I)$. Sementara itu, M_{33} adalah determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-3 dan kolom ke-3 dihilangkan dari matriks $(J_4 - \lambda I)$. Matriks minor M_{22} dan M_{33} secara berturut turut dapat ditulis sebagai persamaan kuadrat sebagai berikut:

$$\lambda^2 + \underbrace{\frac{rq}{b_2(1-m)}}_B \lambda + \underbrace{\frac{qr(b_2(1-m)-q)}{b_2(1-m)}}_C = 0 \text{ dan } \lambda^2 + \underbrace{\frac{rq}{b_1(1-m)}}_P \lambda + \underbrace{\frac{qr(b_1(1-m)-q)}{b_1(1-m)}}_Q = 0.$$

Berdasarkan syarat eksistensi dari masing-masing titik ekuilibrium E_3 dan E_4 , kita dapat melihat bahwa $B > 0$, $C > 0$, $P > 0$ dan $Q > 0$. Hal ini mengindikasikan bahwa kedua persamaan kuadrat tersebut memiliki akar-akar negatif. Akibatnya, kestabilan dari masing-masing ekuilibrium E_3 dan E_4 hanya ditentukan oleh tanda dari akar polinom karakteristik suku pertama $P_3(\lambda)$ dan $P_4(\lambda)$. Dibawah kondisi hipotesis pada teorema 1 bagian iii dan iv, akar dari polinom karakteristik tersebut bertanda negatif. Sehingga, titik ekuilibrium E_3 dan E_4 stabil secara asimtotik lokal. Kebalikan tanda dari kondisi hipotesis menyebabkan akar polinom karakteristik suku pertama $P_3(\lambda)$ dan $P_4(\lambda)$ bertanda positif. Akibatnya titik ekuilibrium E_3 dan E_4 tidak stabil saddle.

Pada kondisi ketiadaan titik ekuilibrium E_3 dan E_4 , titik ekuilibrium E_2 stabil secara asimtotik lokal karena kondisi $q > \max\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$. Namun, ketika ekuilibrium E_3 dan E_4 eksis, yakni memenuhi kondisi $q < \min\{b_1(1-m), b_2(1-m)\}$, titik ekuilibrium E_2 tidak stabil.

Teorema 2 Eksistensi Solusi Periodik

Pada kondisi ketiadaan populasi mangsa N , sistem penyebaran penyakit pada populasi pemangsa SI beresilasi secara periodik terhadap waktu.

Bukti

Untuk membuktikan eksistensi solusi periodik pada kondisi populasi mangsa tidak eksis, kami menggunakan teorema Dulac-Bendixson seperti yang disebutkan pada [12]. Kita akan menunjukkan

bahwa $\frac{\partial(f_1h)}{\partial S} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial I} = 0$ dimana $f_1 = \frac{dS}{dt}$ dan $f_2 = \frac{dI}{dt}$ pada sistem (1) dengan $N = 0$. Misalkan

$h(S, I) = \frac{1}{SI}$ adalah fungsi yang terdeferensialkan pada kuadran non negatif. Selanjutnya kita

memperoleh:

$$\nabla(S, I) = \frac{\partial}{\partial S} \left[(-qS - v(1-d)SI) \left(\frac{1}{SI} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial I} \left[(-qI + v(1-d)SI) \left(\frac{1}{SI} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial S} \left(-\frac{qS}{SI} - \frac{v(1-d)SI}{SI} \right) + \frac{\partial}{\partial I} \left(-\frac{qI}{SI} + \frac{v(1-d)SI}{SI} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S} \left[-\frac{q}{I} - v(1-d) \right] + \frac{\partial}{\partial I} \left[-\frac{q}{S} + v(1-d) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema Dulac-Bendixson, sistem (1) saat populasi mangsa tidak ada ($N = 0$) mempunyai solusi periodik di domainnya.

Simulasi Numerik

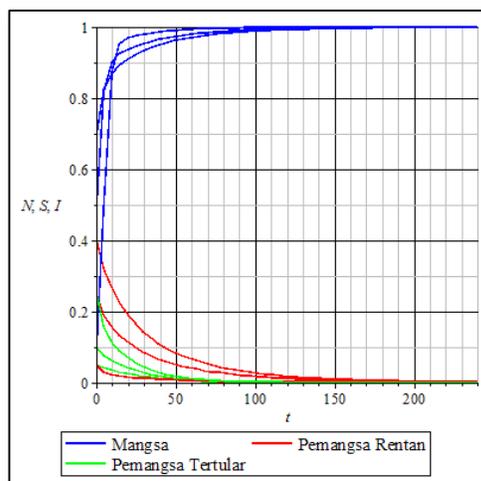
Pada subab ini, kami melakukan simulasi numerik pada sistem (1). Kita melakukan sekenario simulasi untuk bebarapa keadaan, yakni : (i) keadaan titik ekuilibrium E_2 stabil, (ii) keadaan titik ekuilibrium E_3 stabil, (iii) keadaan titik ekuilibrium E_4 stabil, (iv) keadaan titik ekuilibrium koeksistensi E_5 stabil dan (v) simulasi untuk eksistensi solusi periodik. Adapun nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Gambar 2-(a) memperlihatkan kepada kita bahwa titik E_2 stabil sementara titik ekuilibrium lainnya tidak stabil. Nilai parameter yang ada pada tabel (1) kolom simulasi 1 itu memenuhi kondisi pertidaksamaan pada teorema 1-(i) yang menjamin kestabilan dari titik ekuilibrium E_2 . Nilai awal dari kepadatan populasi mangsa dan pemangsa diberikan dengan nilai yang bervariasi. Akan tetapi hal tersebut tidak mempengaruhi kondisi kestabilan, akibatnya semua orbit konvergen ke titik ekuilibrium E_2 seperti terlihat pada Gambar 2-(a).

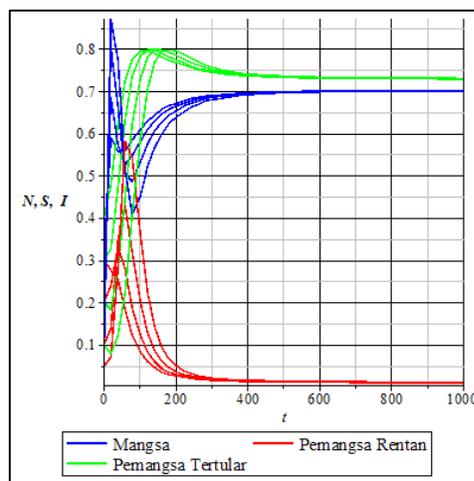
Tabel 1. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik

| Notasi | Deskripsi | Nilai parameter | | | |
|--------|--|-----------------|------------|------------|------------|
| | | Simulasi 1 | Simulasi 2 | Simulasi 3 | Simulasi 4 |
| r | laju pertumbuhan intrinsik mangsa | 0.5 | 0.3 | 0.3 | 0.4 |
| m | peluang sukses mangsa berlindung | 0.5 | 0.2 | 0.2 | 0.3 |
| a_1 | laju pemangsaan oleh individu rentan | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 0.4 |
| a_2 | laju pemangsaan oleh individu terinfeksi | 0.3 | 0.15 | 0.15 | 0.3 |
| b_1 | biomass dari pemangsaan oleh individu rentan | 0.2 | 0.17 | 0.17 | 0.39 |
| b_2 | biomass pemangsaan oleh individu terinfeksi | 0.15 | 0.07 | 0.06 | 0.25 |
| q | tingkat pemanenan pada pemangsa | 0.12 | 0.04 | 0.07 | 0.1 |
| v | laju infeksi pada pemangsa | 0.08 | 0.08 | 0.08 | 0.09 |
| d | tingkat kekebalan pada pemangsa rentan | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.4 |

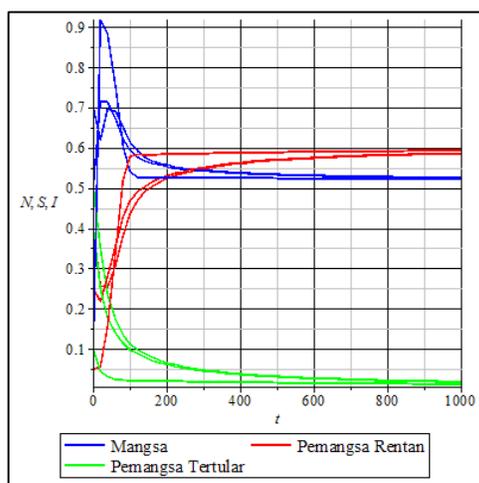
Dengan memilih nilai – nilai parameter yang memenuhi kondisi pada teorema 1-(ii), seperti pada tabel 1 kolom simulasi 2, kita dapat melihat bahwa titik ekuilibrium E_3 stabil secara asimtotik lokal. Hasil ini menunjukkan bahwa populasi pemangsa tertular (infeksi) meningkat sementara pemangsa rentan menuju pada kepunahan seperti ditunjukkan pada Gambar 2-(b). Populasi mangsa pada kondisi ini dapat bertahan hidup dan akan tetap menjaga eksistensinya.



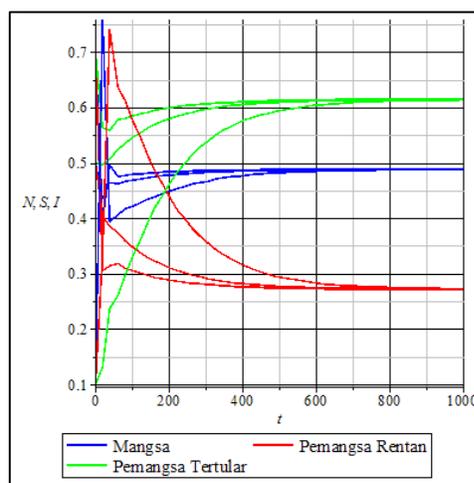
(a)



(b)



(c)



(d)

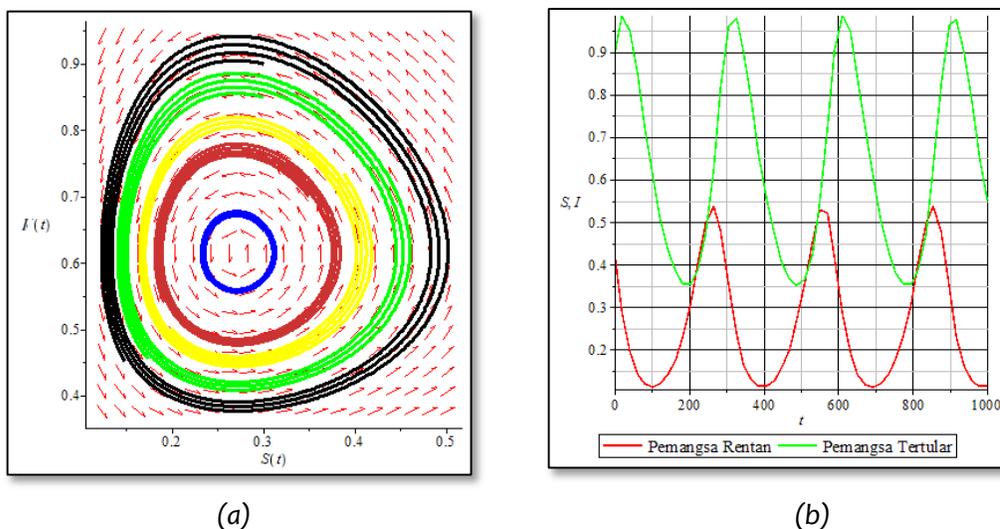
Gambar 2. Simulasi dinamik sistem persamaan diferensial (1) untuk beberapa kestabilan titik ekuilibrium (a) kepunahan pemangsa, (b) kepunahan pemangsa rentan (c) kepunahan pemangsa tertular/terinfeksi (d) koeksistensi populasi

Pemangsa tertular juga mengalami kepunahan, seperti ditunjukkan pada Gambar 2-(c), ketika kita memilih nilai-nilai parameter yang memenuhi kondisi pada teorema 1-(iv). Nilai parameter tersebut dapat dilihat pada tabel 1 kolom simulasi 3. Pada kondisi ini, orbit solusi konvergen ke titik ekuilibrium E_4 , yang mengindikasikan bahwa titik ekuilibrium E_4 stabil secara asimtotik lokal. Kita dapat melihat bahwa kepunahan antara populasi pemangsa rentan dan tertular saling berganti. Sayangnya kita tidak

dapat mengetahui apa penyebab hal tersebut dapat terjadi. Perlu analisis lebih lanjut agar dapat mengetahui penyebab pergantian kepunahan antara populasi pemangsa rentan dan tertular.

Kondisi koeksistensi secara numerik dapat tercapai ketika memilih nilai – nilai parameter seperti pada tabel 1 kolom simulasi 4. Hal tersebut ditunjukkan seperti pada gambar 4-(d). Dengan menggunakan nilai awal yang berbeda-beda, semua orbit konvergen ke titik ekuilibrium $E_5 = (0.487, 0.273, 0.613)$ yang mengindikasikan bahwa titik ekuilibrium E_5 stabil secara asimtotik lokal. Kondisi ini memberitahu kepada kita bahwa semua populasi dapat mempertahankan eksistensinya pada kondisi tertentu. Sayangnya, kita tidak menganalisis lebih lanjut mengenai faktor apa yang dapat menyebabkan titik ekuilibrium E_5 eksis dan stabil secara asimtotik lokal.

Selanjutnya, untuk mengkonfirmasi hasil analitik mengenai keberadaan solusi periodik seperti pada teorema 2, kami melakukan simulasi pada saat populasi mangsa tidak eksis ($N = 0$). Nilai parameter yang digunakan adalah nilai pada saat titik ekuilibrium E_5 eksis, yakni pada tabel 1 kolom simulasi 4. Orbit dari solusi periodik dapat dilihat pada Gambar 3. Pada Gambar 3-(a) dapat dilihat potret fase dari orbit pada bidang SI . Sementara itu, pada Gambar 3-(b) merupakan dinamik dari populasi S dan I terhadap waktu. Nilai awal yang diberikan untuk masing-masing kompartemen adalah $\{S(0) = 0.42, I(0) = 0.9\}$.



Gambar 3. Simulasi numerik untuk solusi periodik (a) potret fase pada bidang $-SI$
(b) dinamik populasi S dan I pada kondisi periodik terhadap waktu

Gambar 3 memberikan suatu wawasan kepada kita bahwa ketika pemangsa rentan merupakan fungsi monoton turun di sekitar $t \in (0, 20)$, pemangsa tertular merupakan fungsi monoton naik. Namun seiring dengan berkurangnya pemangsa rentan yang disebabkan oleh laju pemanenan dan laju infeksi, pemangsa tertular juga ikut menurun. Selanjutnya, faktor kekebalan pemangsa rentan dapat meningkatkan kembali frekuensi populasinya. Karena faktor kekebalan tidak bersifat permanen, akibatnya terdapat sejumlah populasi rentan yang dapat tertular sehingga populasi pemangsa tertular akan mengalami kenaikan.

Kesimpulan

Pada paper ini, telah dikonstruksi model dinamik untuk mangsa pemangsa yang melibatkan faktor penyebaran penyakit serta faktor pemanenan pada pemangsa. Faktor kemampuan berlindung mangsa terhadap pemangsa dan faktor kekebalan pada pemangsa rentan dilibatkan pula dalam model matematika tersebut. Berdasarkan hasil analisis seperti pada pada teorema 2, terdapat solusi periodik pada model dinamik tersebut untuk kompartemen pemangsa yang terdiri dari pemangsa rentan dan pemangsa tertular. Secara biologis hal ini menunjukkan bahwa pada kondisi tidak ada populasi mangsa, penyebaran penyakit pada populasi pemangsa akan terus ada secara periodik. Hal ini diakibatkan oleh faktor kekebalan pada pemangsa rentan yang bersifat tidak permanen.

Ucapan Terima Kasih

-

DAFTAR PUSTAKA

- [1] A. Muh. Amil Siddik, Syamsuddin Toaha, Kasbawati, "Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Holling Tipe III dan Penyakit pada Pemangsa Super", *Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya*, Surabaya 21 Oktober 2017.
- [2] Kooi, B.W., VanVoorn, G.A.K. dan Das, K.P., "Stabilization and Complex Dynamics in Predator-Prey Model with Predator Suffering from an Infectious Disease", *Ecological Complexity*, vol. 8, 113-122, 2011.
- [3] Haque, M., "A Predator-prey Model with Disease in the Predator Species only", *J. Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, 2224–2236, 2010.
- [4] Clark, C.W., *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, 2nd ed., New York: John Wiley and Sons, 1976.
- [5] Goh, B.S., Leitman, G. and Vincent, T.L., "Optimal control of a predator-prey system", *Mathematical Biosciences*, vol. 19, 263–286, 1974.
- [6] Azar, C., Holmberg, J. and Lindgren, K., "Stability Analysis of Harvesting in A Predator-Prey Model", *Journal of Theoretical Biology*, vol. 174, 13-19, 1995.
- [7] Costa, M.I.S., "Harvesting induced fluctuations: Insights from a threshold management policy", *Mathematical Biosciences*, vol. 205, 77-82, 2007.
- [8] Bairagi, N., Chaudhury, S. and Chattopahyay, J., "Harvesting as a Disease Control Measure in An Eco-Epidemiological System - a Theoretical Study", *Mathematical Biosciences*, vol. 217, 134-144, 2009.
- [9] Cheve, M., Congar, R. and Diop, P.A., "Resilience and Stability of Harvested Predator-Prey Systems to Infectious Disease in the Predator", 2010.

- [10] I. Trisdiani, P., dkk., "Dynamics of Harvested Predator-Prey System with Disease in Predator and Prey in Refuge", *International Journal of Ecological Economics & Statistics (IJEES)*, vol. 33, no. 2, -, 2014.
- [11] Suryanto, A., dkk., "Dynamics of a Predator-Prey Model Incorporating Prey Refuge, Predator Infection and Harvesting", *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no.76, 3751-3760, 2011.
- [12] Osuna, O. & Villasenor, G., "On the Dulac-Function Set", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation*, vol. 72, 43-45, 2011.