Himpunan Graf yang Kuadrat Lintasan-Jenuh Minimal

Salwa Nursyahida
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Gunung Djati Bandung
email: salwanursyahida@uinsgd.ac.id

Abstrak

Diberikan G adalah graf sederhana, m adalah bilangan bulat positif. Kuadrat dari graf lintasan P_m, dinotasikan dengan P_m^2, adalah graf yang diperoleh dari P_m dengan menambahkan sisi-sisi di antara setiap pasangan titik yang memiliki jarak 2 (dua) di P_m. Graf G dikatakan P_m^2-jenuh jika G tidak memuat P_m^2 tetapi penambahan sebarang sisi pada dua titik tak bertetangga di G selalu memuat P_m^2. Banyaknya sisi minimum dari graf n titik yang P_m^2-jenuh didefinisikan sebagai bilangan jenuh dan dinotasikan dengan $sat(n, P_m^2)$. Didefinisikan $Sat(n, P_m^2) = \{G: |V(G)| = sat(n, P_m^2)$ dan G adalah P_m^2-jenuh. Dalam artikel ini graf-graf pada $Sat(n, P_m^2)$ diperoleh secara komputasi untuk $n \leq 8$ dan $m \leq 8$, dan dinyatakan dalam barisan derajatnya.

Kata kunci: kuadrat graf, kuadrat graf lintasan, bilangan jenuh, himpunan graf jenuh minimal, barisan derajat .

Abstract

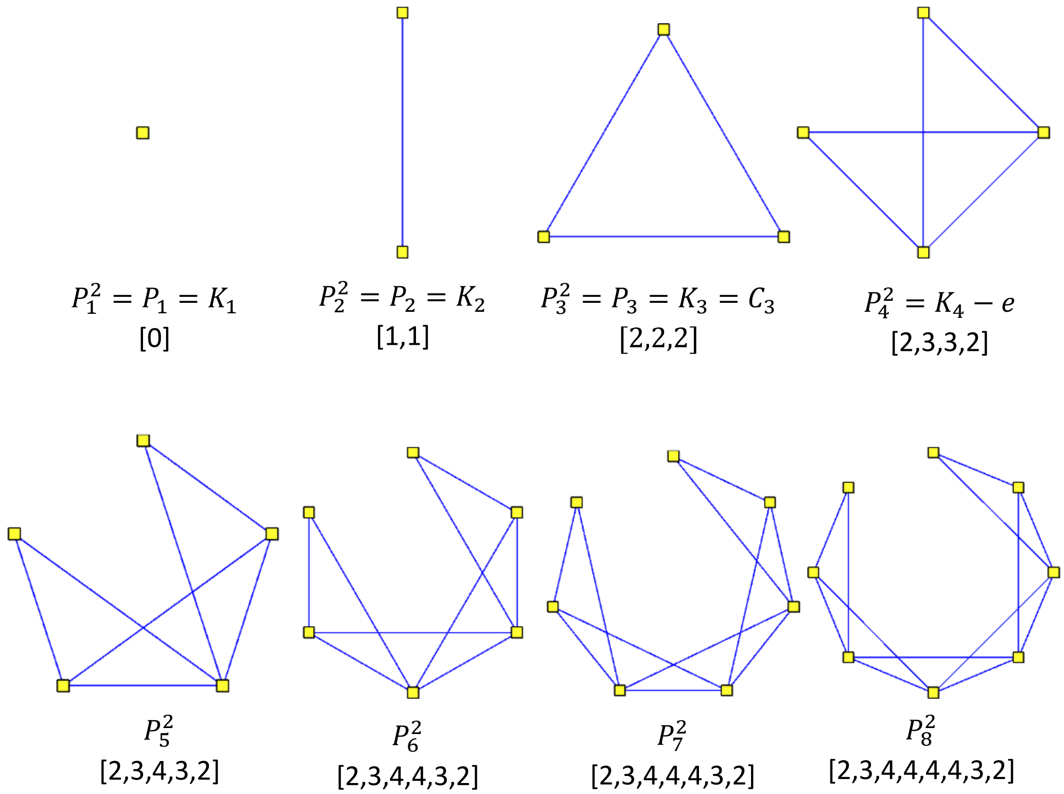
Given a simple graph G, m a positive integer. The square of path graph P_m, denoted by P_m^2, is a graph obtained from P_m by adding new edges between any pair of vertices at distance at most 2 in P_m. A graph G is P_m^2-saturated if G does not contain P_m^2 as a subgraph, but the addition of any edge between two nonadjacent vertices in G contain P_m^2. The minimum size of P_m^2-saturated graph on n vertices is called a saturation number for P_m^2, denoted by $sat(n, P_m^2)$. A set $Sat(n, P_m^2) = \{G: |V(G)| = sat(n, P_m^2)$ and G a P_m^2-saturated graph}. All graphs in $Sat(n, P_m^2)$ are obtained computationally for $n \leq 8$ and $m \leq 8$ and expressed by their degree sequence.

Keywords: degree sequence of graph, path square, power graphs, saturated graphs, saturated numbers.

Pendahuluan

Misalkan G dan H graf sederhana. Graf G dikatakan H-jenuh jika G tidak memuat H sebagai subgraf tetapi penambahan sebarang sisi pada dua titik tak bertetangga di G selalu H. Konsep tentang graf jenuh pertama kali diperkenalkan oleh Mantel pada tahun 1907 [1] tentang graf jenuh maksimum yang tidak memuat segitiga (siklus dengan tiga sisi) atau yang kemudian dikenal dengan bilangan ekstermal. Konsep graf jenuh minimum pertama kali dibahas dalam [2] dan [3], yang kemudian dinotasikan dengan $sat(n, H)$ adalah banyaknya sisi terkecil yang mungkin yang dimiliki oleh graf dengan n buah titik yang H-jenuh. Graf yang memiliki sisi sebanyak $sat(n, H)$ disebut graf H-jenuh minimum, dan $Sat(n, H)$ adalah himpunan graf-graf yang H-jenuh minimum.

Graf yang menjadi kajian dalam artikel ini adalah kuadrat dari graf lintasan dengan $m \leq 8$. Kuadrat dari graf lintasan dengan P_m, dinotasikan dengan P_m^2, adalah graf yang diperoleh dari P_m dengan menambahkan sisi-sisi di antara setiap pasangan titik yang memiliki jarak 2 di P_m. Sedangkan secara umum, pangkat ke-k dari sebuah graf sederhana $G = (V, E)$ dinotasikan dengan G^k adalah graf dengan himpunan titik V, dua titik berbeda di G^k bertetangga jika dan hanya jika jarak keduanya di G tak lebih panjang dari k. Oleh karena itu, setiap graf terhubung dengan m titik akan menjadi graf lengkap K_m jika dipangkatkan dengan bilangan yang lebih besar sama dengan $m - 1$. Barisan derajat dari sebuah graf adalah daftar derajat dari semua titik-tik pada graf tersebut. Sehingga P_m^2 untuk $m \leq 8$ dan barisan derajatnya diilustrasikan pada **Gambar 1** berikut.



Gambar 1. Kuadrat Graf Lintasan dengan $m \leq 8$ titik.

Metode

Artikel ini akan berfokus di graf-graf yang Kuadrat Graf Lintasan-jenuh minimum yang diperoleh secara komputasi menggunakan Maple 18, dengan algoritma-algoritma berikut:

Algoritma 1. Misalkan $\mathrm{n} \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah bilangan bulat.

1. Misalkan $\{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$ adalah himpunan seluruh graf dengan n titik yang saling tak isomorfik.
2. Definisikan $\Gamma(\mathrm{n}) := \{\}$
3. **for** i **from** 1 **to** p **do**

   if $G_i \not\supseteq P_m^2$ **then**

   Definisikan $E' := \{\}$

   for j **from** 1 **to** $|E(\bar{G})|$ **do**

if $G_i + e_j \supseteq P_m^2$ **then** $E' := E' \cup \{e_j\}$ **end if;**

end do;

if $E' = E(\bar{G})$ **then** $\Gamma(\mathrm{n}) := \Gamma(\mathrm{n}) \cup \{G_i\}$ **end if;**

end do;

4. $\Gamma(\mathrm{n})$ adalah himpunan graf-graf dengan n titik yang P_m^2-jenuh

Algoritma 1 memeriksa setiap graf dengan n titik yang tak memuat P_m^2 tetapi setiap penambahan sisi mengasilkan P_m^2 sebagai subgraf. Sehingga berdasarkan definisi Algoritma 1 memberikan graf dengan n titik yang P_m^2-jenuh. Jaminan bahwa terdapat graf yang P_m^2-jenuh telah tercantum dalam [4]. Algoritma 2 berikut berperan memilih graf-graf dengan banyaknya sisi minimum dari himpunan graf P_m^2-jenuh yang diperoleh pada Algoritma 1.

Algoritma 2. Misalkan $\mathrm{n} \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah bilangan bulat.

1. Perhatikan bahwa $\Gamma(\mathrm{n})$ adalah himpunan graf-graf dengan n titik yang P_m^2-jenuh
2. Misalkan $\Gamma_i(n)$ adalah graf anggota $\Gamma(n)$ dengan $i \in \{1,2, \ldots |\Gamma(n)|\}$
3. **for** i **from** 2 to $|\Gamma(n)|$ **do**

   definisikan $Sat(n, P_m^2) := \{\Gamma_1(n)\}$

   If $|E(\Gamma_i(n))| < |E(\Gamma_{i-1}(n))|$ **then** $Sat(n, P_m^2) := \{\Gamma_i(n)\}$

   else if $|E(\Gamma_i(n))| = |E(\Gamma_{i-1}(n))|$ **then** $Sat(n, P_m^2) := Sat(n, P_m^2) \cup \{\Gamma_1(n)\}$

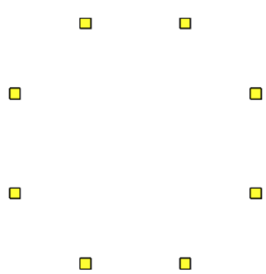
   end if;

   end do;
4. $Sat(n, P_m^2)$ adalah himpunan seluruh graf yang P_m^2-jenuh minimum

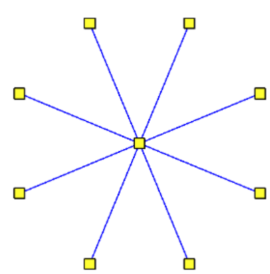
Hasil dan Diskusi

Perhatikan bahwa untuk $m = 1$ sudah jelas bahwa tidak dapat dilakukan penambahan sisi pada graf dengan satu titk, sehingga n dalam artikel ini untuk $m \geq 2$.

Teorema 1. [1] Jika $2 \leq t \leq n$, maka $sat(n, K_t) = (t-2)(n-t+2) + \binom{t-2}{2}$ dan $Sat(n, K_t)$ hanya memuat sebuah graf $K_{t-2} + \overline{K_{n-t+2}}$.



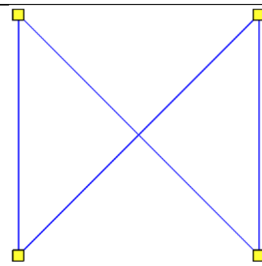
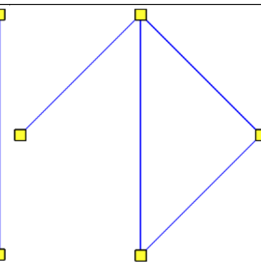
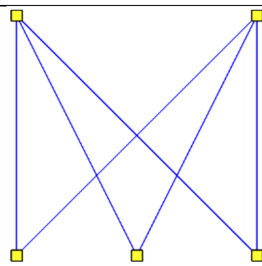
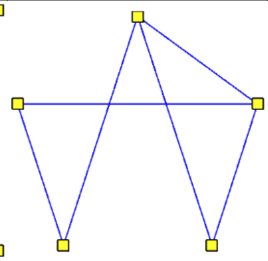
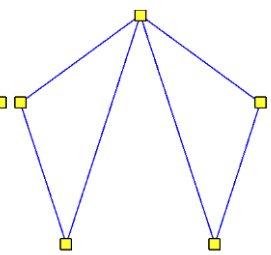
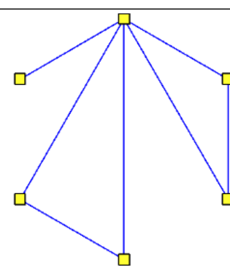
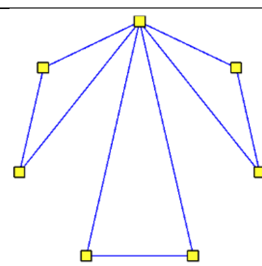
Gambar 2. Graf $\overline{K_8}$ adalah graf P_2^2-jenuh minimum untuk 8 titik dengan barisan derajat [0,0,0,0,0,0,0,0]

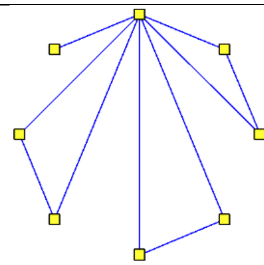
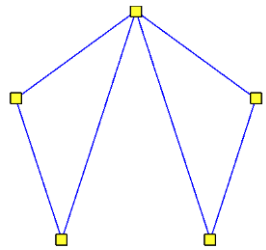
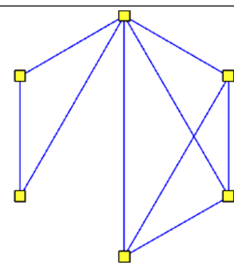
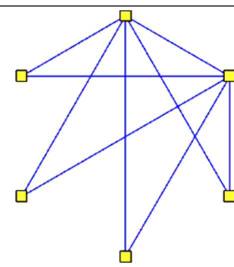
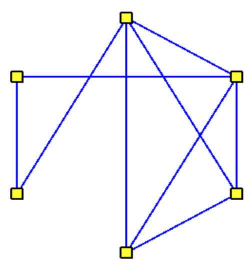
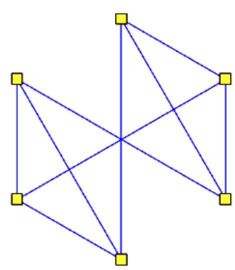
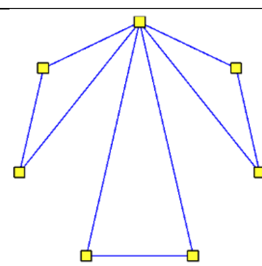


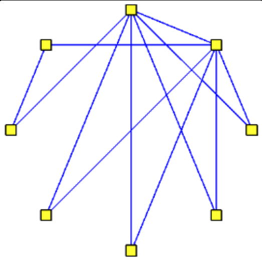
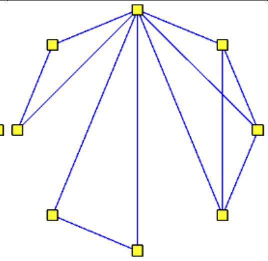
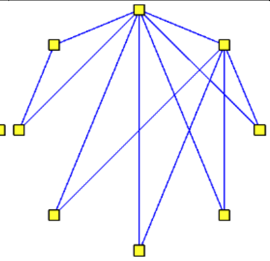
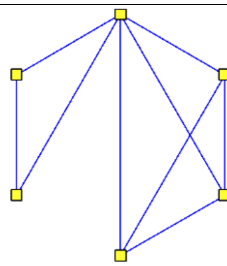
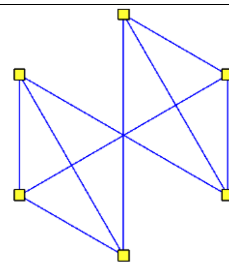
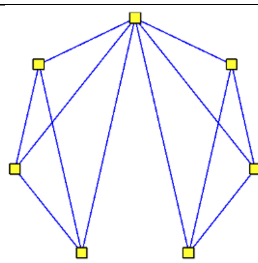
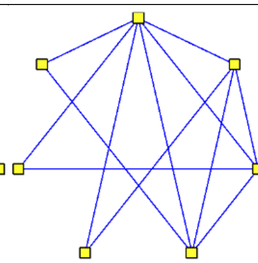
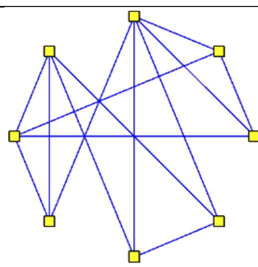
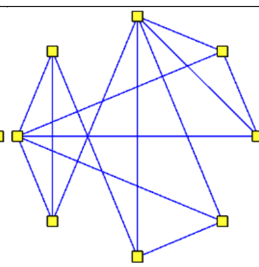
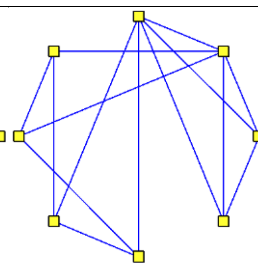
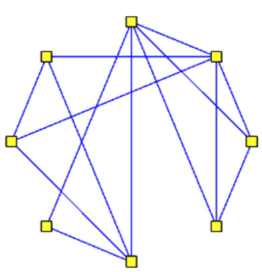
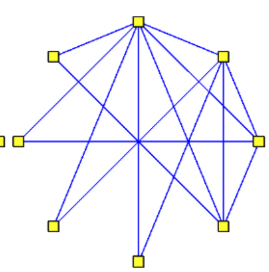
Gambar 3. Graf $S_8 = K_{1,8}$ adalah graf P_3^2-jenuh minimum untuk 9 titik dengan barisan derajat [8,1,1,1,1,1,1,1,1]

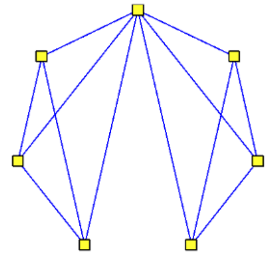
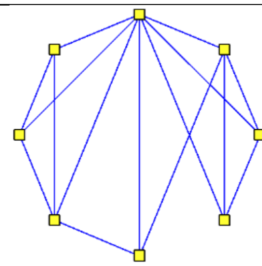
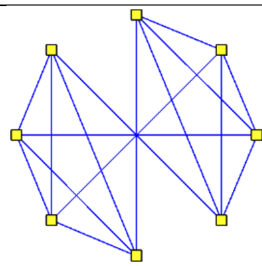
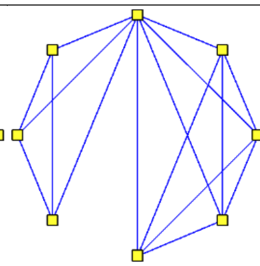
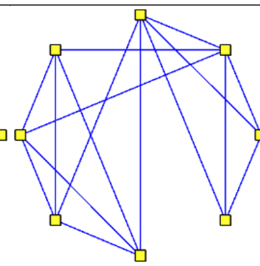
Sehingga berdasarkan Teorema 1 maka dapat disimpulkan untuk $Sat(n, P_2^2) = \{\overline{K_{\mathrm{n}}}\}$ yaitu graf komplemen dari graf lengkap n titik dan $Sat(n, P_3^2) = \{K_1 + \overline{K_{\mathrm{n-1}}}\} = \{S_{n-1}\} = \{K_{1,n-1}\}$ yaitu graf bipartite $K_{1,n-1}$ atau di kenal juga dengan istilah graf bintang S_{n-1}. Selanjutnya representasi graf-graf yang P_m^2-jenuh minimum untuk $4 \leq n \leq 8$ dan $4 \leq m \leq 8$ akan disajikan dalam Tabel 1 lengkap dengan barisan derajat dari graf-graf tersebut dan bilangan jenuh $sat(n, P_m^2)$.

Tabel 1. Graf-graf yang P_m^2-jenuh minimum dan barisan derajatnya.

n	m	$sat(n, P_m^2)$	Graf-graf di $Sat(n, P_m^2)$ dan barisan derajatnya
4	4	4	 [2,2,2,2]  [3,2,2,1]
5	4	6	 [3,2,2,2,3]  [3,3,2,2,2]  [4,2,2,2,2]
6	4	7	 [5,2,2,2,2,1]
7	4	9	 [6,2,2,2,2,2,2]

8	4	10	 [7,2,2,2,2,2,2,1]
5	5	6	 [4,2,2,2,2]
6	5	9	 [5,3,3,3,2,2]  [5,5,2,2,2,2]  [4,4,3,3,2,2]  [3,3,3,3,3,3]
7	5	9	

			[6,2,2,2,2,2,2]
8	5	12	 [6,6,2,2,2,2,2,2]  [7,3,3,3,2,2,2,2]  [7,5,2,2,2,2,2,2]
6	6	9	 [5,3,3,3,2,2]  [3,3,3,3,3,3]
7	6	12	 [6,3,3,3,3,3,3]  [6,4,4,4,2,2,2]
8	6	14	 [5,3,3,3,3,3,4,4]  [5,3,3,3,3,3,5,3]  [5,5,3,3,3,3,3,3]  

			[5,5,3,3,4,2,3,3] [7,5,4,4,2,2,2,2]
7	7	12	 [6,3,3,3,3,3,3]
8	7	15	 [7,4,3,3,3,4,3,3]
8	8	16	   [4,4,4,4,4,4,4,4] [7,4,4,4,4,3,3,3] [5,5,3,3,4,4,4,4]

Teorema 1 dan Tabel 1 memberikan gambaran bahwa semua graf yang P_m^2- jenuh minimum untuk $3 \leq m \leq 8$ dan $3 \leq n \leq 8$ adalah graf yang terhubung, berdiameter 2 (dua), memiliki derajat minimum tak kurang dari 2 (dua) untuk $m = 5$ dan $m = 6$ sedangkan untuk $m = 7$ dan $m = 8$ memiliki derajat minimum tak kurang dari 3 (tiga), serta baik sebagai fungsi dari m maupun fungsi dari n terlihat bilangan jenuh untuk P_m^2 merupakan fungsi yang monoton naik.

Kesimpulan

Dengan menggunakan pendataan secara komputasi diperoleh graf-graf dengan n titik yang P_m^2 −jenuh minimum untuk $m \leq 8$ dan $n \leq 8$, bilangan jenuh $sat(n, P_m^2)$ dan barisan derajat dari graf tersebut. Semua graf yang P_m^2- jenuh minimum untuk $3 \leq m \leq 8$ dan $3 \leq n \leq 8$ adalah graf yang terhubung, berdiameter 2 (dua), memiliki derajat minimum tak kurang dari 2 (dua) untuk $m = 5$ dan $m = 6$ sedangkan untuk $m = 7$ dan $m = 8$ memiliki derajat minimum tak kurang dari 3 (tiga), serta baik sebagai fungsi dari m maupun fungsi dari n terlihat bilangan jenuh untuk P_m^2 merupakan fungsi yang monoton naik.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Jurusan Matematika dan pihak-pihak lain yang ikut berperan serta dalam penelitian ini.

Referensi

[1] W. Mantel, "Problem 28," *Wiskundige Opgaven,* vol. 10, pp. 60-61, 1907.

[2] P. Erdős and T. Gallai, "On the minimal number of vertices representing the edges of graph.," *Magyar tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.,* vol. 6, pp. 181-203, 1961.

[3] P. Erdős, A. Hajnal and J. W. Moon, "A problem in graph theory," *Amer. Math. Monthly,* vol. 71, pp. 1107-1110, 1964.

[4] P. Turán, "Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie," *Mat. Fiz. Lapok,* vol. 48, no. 1941, pp. 436-452, 1941.